

Графы-1. Часть 1.

8 класс

17.01.15

1. Из доски 4×4 вырезаны все угловые клетки. Может ли шахматный конь обойти всю доску и вернуться на исходную клетку, побывав в каждой клетке ровно один раз?

Определение. Граф задан, если задано множество его *вершин*, и для любой пары различных вершин известно, связаны они *ребром* или нет. Степенью вершины называется количество выходящих из неё рёбер.

2. а) Докажите, что количество рёбер в графе есть полусумма степеней всех его вершин.
б) Можно ли на плоскости так нарисовать 9 отрезков, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими?
в) Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

3. Докажите, что в любой компании найдутся двое с одинаковым числом знакомых.

Определение. *Путём* в графе называется последовательность рёбер каждое следующее из которых начинается в конце предыдущего. *Циклом* в графе называется замкнутый путь, то есть такой, начало и конец которого совпадают.

Определение. Граф называется *связным*, если любые две его вершины могут быть соединены путём. Любой граф является объединением некоторых связных "кусков", каждый такой "кусок" называется *компонентой связности*.

4. Каждый из семи мальчиков имеет не менее трёх братьев. Докажите, что все мальчики братья.
5. В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта – ковёр-самолёт. Из столицы выходит 21 ковровая линия, из города Дальний - одна, а из всех остальных городов – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

Определение. *Эйлеровым путём* называется путь, проходящий по всем рёбрам ровно один раз. *Эйлеровым циклом* называется цикл проходящий по всем рёбрам ровно один раз.

6. а) Докажите, что эйлеров цикл в связном графе существует тогда и только тогда, когда все степени вершин чётны.
б) Сформулируйте и докажите критерий существования эйлерова пути.
в) (*Задача Эйлера о кёнигсбергских мостах*) На реке два острова – Большой и Малый. Большой соединён с каждым берегом двумя мостами, а также соединён одним мостом с Малым. Малый, помимо Большого соединён с каждым берегом одним мостом. Докажите, что нельзя обойти все мосты, пройдя каждый мост ровно один раз.