Лепреконы

30 мая 2015 г.

Задачи на зачёт.

1. Докажите, что из 3^8 натуральных делителей числа 3^8 можно выбрать несколько (быть может, один) не обязательно различных делителей с суммой, равной 3^8. (3+)

2. Найдите Найдите все многочлены $P(x)$, для которых при любом x выполнено Найдите все многочлены $P(x)$, для которых при любом x выполнено

$$xP(x+1) = P(x)(x+26).$$

(4)

3. Существует ли последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \dots$ такая, что каждое натуральное число встречается в ней ровно один раз, и для каждого натурального k сумма первых k членов последовательности делится на k? (5+)

4. На столе лежат n спичек ($n > 1$). Двое игроков по очереди снимают их со стола. Первым ходом игрок снимает со стола любое количество спичек от 1 до $n-1$, а дальше каждый раз можно брать со стола не больше спичек, чем взял предыдущим ходом партнёр. Выигрывает тот, кто взял последнюю спичку. Кто выигрывает при правильной игре? (4)

5. Назовём *медианой* системы $2n$ точек плоскости прямую, проходящую ровно через две из них, по обе стороны от которой точек этой системы поровну. Какое наименьшее количество медиан может быть у системы из $2n$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой? (3+)

6. Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого — квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом его вокруг одной из ножек перемещать вторую ножку в другой узел на листе. Можно ли за несколько таких шагов поменять ножки циркуля местами? (5-)

7. В 2015 коробках находятся $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{2014}$ шаров соответственно. Играют двое. Каждым ходом игрок убирает из четырёх различных коробок по шарику. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре? (4+)

8. Положительные числа x и y меньше единицы. Докажите, что $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} < 1$. (3+)

9. Астроном наблюдал 2006 звезд и посчитал сумму попарных расстояний между ними, равную S. Облако закрыло 1003 звезды. Докажите, что теперь сумма попарных расстояний между видимыми звездами меньше $S/2$. (5-)

10. В последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности встретится четное число. (4)

11. Докажите, что если число $x+\frac{1}{x}$ — целое, то число $x^n+\frac{1}{x^n}$ тоже целое. (3+)

12. Дракон заточил рыцаря в темницу и выдал ему 100 различных монет, половина из которых – фальшивые (но какие именно – знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в какой-то день в этих кучках окажется поровну настоящих монет, либо поровну фальшивых, то дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем на двадцать пятый день? (4+)

13. В некоторых клетках квадрата 50×50 стоят $+1$ и -1, причём сумма всех чисел не больше 100 и не меньше -100. Докажите, что есть квадрат 25×25, абсолютная величина суммы чисел в котором не превосходит 25. (3+)

14. В прямоугольной таблице некоторые клетки отмечены звездочкой. Известно, что для любой отмеченной клетки число звездочек в ее столбце равно числу звездочек в ее строке. Докажите, что число столбцов, в которых есть хотя бы одна звездочка, равно числу строк, в которых есть хотя бы одна звездочка. (4)

15. Решите в целых числах уравнение $x^3+7=y^2$. (5-)

16. Докажите, что внутри правильного треугольника ABC существует точка P, из под которой стороны видны под углами 80°, 120° и 160°. (3-)

17. Окружность разделена на равные дуги n диаметрами. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки M, лежащей внутри оркужности, на эти диаметры, являются вершинами правильного многоугольника. (3)

18. Диагонали равнобдеренной трапеции $ABCD$ с боковой стороной AB пересекаются в точке P. Докажите, что центр O её описанной окружности лежит на описанной окружности треугольника APB. (3)

19. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 являются биссектрисами углов треугольника ABC тогда и только тогда, когда они являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$. (3)

20. В окружность вписаны треугольники T_1 и T_2, причём вешрины треугольника T_2 являются серединами дуг, на которые окружность разибвается вершинами треугольника T_1. Докажите, что в шестиугольнике, являющемся пересечением треугольникво T_1 и T_2, диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонами треугольника T_1 и пересекаются в одной точке. (5-)

21. Окружность S_1 касается сторон угла ABC в точках A и C. Окружность S_2 касается прямой AC в точке C и проходит через точку B; окружность S_1 она пересекает второй раз в точке M. Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам. (4-)

22. В треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH. Прямые, проведённые через произвольную точку P плоскости перпендикулярно CA, CM и CB, пересекают прямую CH в точках A_1, M_1 и B_1 соответственно. Докажите, что $A_1M_1=M_1B_1$. (4-)

23. Рассмотрим всевозможные равносторонние треугольники PKM, вершина P

которых фиксирована, а вершина K лежит в данном квадратае. Найдите геометрическое место вершин M. (3)

24. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним обрзаом правильные треугольники BCP и CDQ. Докажите, что треугольник APQ правильный (4-)

25. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD — в точке Q. Докажите, что точки пересечения биссектрис углов AQB и BPC со сторонами четырёхугольника являются вершинами ромба. (4)

26. Вокруг правильного треугольника APQ описан прямоугольник $ABCD$, причём точки P и Q лежат на сторонах BC и CD соответственно; P' и Q' — середины сторон AP и AQ. Докажите, что треугольники $BQ'C$ и $CP'D$ правильные. (4-)

27. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Прямая KL параллельна CC_1, причём точки K и L лежат на прямых BC и B_1C_1 соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_1KL лежит на прямой AC. (5)

28. *Пузатостью* прямоугольника называется отношение его меньшей стороны к большей. Квадрат разбит на несколько прямоугольников. Докажите, что сумма их пузатостей не меньше 1. (5-)

29. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, причём $S^2_{ABP} + S^2_{CDP} = S^2_{BCP} + S^2_{ADP}$. Докажите, что P — середина одной из диагоналей. (4-)

30. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырёхугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырёхугольника параллельна стороне параллелограмма. (4-)

31. Постройте четырёхугольник $ABCD$ по четырём углам и длинам сторон $AB = a$ и $CD = b$. (4-)

32. Постройте четырёхугольник по углам и диагоналям. (5++)

33. Постройте параллелограмм, две смежные вершины которого даны, а две другие лежат на данной окружности. (3)

34. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Выпуклый четырёхугольник $KLMN$ таков, что B — середина AK, C — середина BL, D — середина CM, а A — середина DN. Найдите отношение площадей этих четырёхугольников. (4-)

35. Даны четыре попарно непараллельные прямые и точка O, не лежащая на этих прямых. Постройте параллелограмм с центром O и вершинами, лежащими на данных прямых, — по одной на каждой. (3+)

36. В треугольнике ABC площади S выбрана точка P, и через неё проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Треугольник разбился на 6 частей, причём три из них — треугольные с площадями S_1, S_2, S_3. Докажите, что $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$. (4-)

37. У края биллиарда, имеющего форму правильного $2n$-угольника, стоит шар. Как надо пустить шар от борта, чтобы он, отразившись последовательно от всех бортов, вернулся в ту же точку? (При отражении углы падения и отражения равны.) Доказать, что при этом длина пути шара не зависит от выбора начальной точки. (4+)

38. Пусть k — целое число, а $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Известно, что $P(Q(k)) = Q(P(k))$. Докажите, что $P(P(k)) - Q(Q(k))$ делится на $P(k) - Q(k)$. (4+)

39. На плоскости даны точки A, B, C, X. Точку X центральными симметриями последовательно отражают относительно точек A, B, C, A, B, C (в указанном порядке). Докажите, что X после этих шести отражений вернётся на своё место. (4-)

40. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет присутствует и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника вершины были трех разных цветов. (4-)

41. Пусть p и $p + 2$ — простые числа. Докажите, что число $2p(p + 1)(p + 2)$ является общим делителем чисел $p^{p+2} - p$ и $(p + 2)^p - p - 2$. (4-)

42. В треугольнике ABC угол A равен 60°. На лучах BA и CA отложены отрезки BX и CY, равные стороне BC. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения биссектрис треугольника ABC. (4)