

## Многочлены-2. Корни.

1. (*теорема Безу*). Докажите, что если многочлен  $P$  имеет корень  $a$ , то  $P(x) = (x - a)Q(x)$  для некоторого многочлена  $Q$ .

2. (*Самый Важный Факт Про Многочлены*).

(a) Докажите, что если у многочлена степени  $n$  нашёлся  $n + 1$  различных корней, то многочлен тождественно равен нулю.

(b) Докажите, что у ненулевого многочлена степени  $n$  не более  $n$  различных корней.

(c) У многочлена степени  $n$  нашлось  $n$  корней  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Чему может быть равен этот многочлен?

3. Докажите, что если значения двух многочленов равны во всех точках, то они равны тождественно.

4. Найдите  $(x^n - 1, x^m - 1)$ .

5. Многочлен  $P$  таков, что  $x - 1 \mid P(x^n)$ . Докажите, что  $x - 1 \mid P(x)$ .

6. Многочлен с целыми коэффициентами в четырёх различных целых точках принимает значение 7. Докажите, что ни в какой другой целой точке он не принимает значение 14.

7. У многочлена  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  с целыми коэффициентами нашёлся рациональный корень  $p/q$  ( $p$  и  $q$  взаимно просты).

(a) Докажите, что  $p \mid a_0$  и  $q \mid a_n$ .

(b) Докажите, что  $P(x) = (qx - p)Q(x)$ , где  $Q$  — многочлен с целыми коэффициентами.

8. Докажите, что при различных  $a, b, c$  выполнено

$$\frac{(x - a)(x - b)}{(c - a)(c - b)} + \frac{(x - b)(x - c)}{(a - b)(a - c)} + \frac{(x - c)(x - a)}{(b - c)(b - a)} = 1.$$

9. Чему равно  $x(x - 1)(x - 2) \dots (x - p + 1)$  по модулю  $p$  для простого  $p$ ?