

Лепреконы
18 апреля 2015 г.
Разнобой

1. В спортклубе тренируются 100 толстяков весом от 1 до 100 кг (все толстяки разного веса). На какое наименьшее число команд их можно разделить так, чтобы ни в одной команде не было двух толстяков, один из которых весит вдвое больше другого?

2. В стране 100 городов. Между любыми двумя городами либо ходят поезда, либо летают самолёты (ровно одно из двух). Докажите, что можно либо разобрать все поезда, либо все самолёты на металлолом, чтобы всё равно можно было бы пропутешествовать по всем городам страны.

3. Дан четырёхугольник $ABCD$, причём $AB < BC$ и $AD < DC$. Точка M лежит на диагонали BD . Докажите, что $AM < MC$.

4. Для положительных a, b, c докажите неравенство $ab + bc + ac \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$.

5. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и P (радиусы окружностей различны). В точке A к окружности ω_1 проведена касательная, пересекающая (вторично) ω_2 в точке B . Через точку P проведена прямая, параллельная AB , пересекающая ω_2 в точке C и ω_1 в точке D . Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

6. Какое максимальное количество шахматных коней можно расставить на доске 7×7 , так чтобы они не били друг друга?

7. Натуральные числа m и n таковы, что $m^2 + n^2 + m$ кратно mn . Докажите, что m — квадрат натурального числа.

8. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M и N таким образом, что $\angle MAN = 45^\circ$. AH — высота треугольника AMN . Докажите, что $AH = AB$.

9. Натуральные числа a и b взаимно просты, $a + b$ кратно $a - b$. Докажите, что по крайней мере одно из чисел $ab + 1$, $4ab + 1$ — квадрат.

10. В треугольнике ABC углы при вершинах B и C равны 40° , BD — биссектриса угла B . Докажите, что $BC = BD + DA$.

11. По кругу расставлены 2014 чисел, каждое из которых 1 или -1 (при этом не все одинаковые). Рассматриваются всевозможные блоки из тринадцати подряд идущих чисел, в каждом из них считается произведение, а потом все вычисленные произведения суммируются. Какое максимальное значение может принимать полученная сумма?

12. Два игрока по очереди закрашивают клетки изначально белой доски 2015×2015 черным цветом. Нельзя красить клетку дважды, нельзя чтобы в одной строке или столбце было больше двух закрашенных клеток. Проигрывает, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре, начинающий или его противник?