Лепреконы

11 апреля 2015 г.

Глобальное дорешивание

1. На бесконечной клетчатой доске эволюционирует «жизнь». Вначале все клетки были белыми, а потом n из них стали вдруг черными. Каждую минуту клетка красится в тот цвет, которого больше среди трех клетов: ее самой, соседа справа и соседа сверху. Докажите, что

(a) рано или поздно все черные клетки исчезнут;

(b) это случится не более, чем через n минут.

2. **(a)** Докажите, что любой простой делитель q числа 2^p-1 (p – нечётное простое) имеет вид $q = 2pk+1$.

(b) Докажите, что для каждого нечётного простого p существует хотя бы одно простое число вида $2pk+1$.

3. Решите в целых числах уравнение $x^2y^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

4. Докажите, что для любого простого p вида $4k + 1$ найдётся такое натуральное x, что $x^2 + 1 \vdots p$.

5. Вася написал в строчку на доске все вычеты по модулю p, каждый ровно по одному разу, в произвольном порядке. Петя сделал то же самое, но строчкой ниже (и, естественно, написал вычеты в другом порядке). Гриша не смог отличиться своей фантазией, и проделал ту же процедуру на третьей строчке. Могло ли оказаться так, что каждое число в третьей строчке является произведением соответствующих двух чисел в первых двух строчках?

6. Число $a^2 + ab + b^2$ делится на простое число $p = 3k + 2$. Докажите, что a и b делятся на p.

7. Докажите, что уравнение $4xy - x - y = z^2$ **(a)** не имеет решений в натуральных числах, **(b)** но имеет бесконечно много решений в целых числах.

8. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка O так, что $\angle OAD = \angle OCD$. Докажите, что $\angle OBC = \angle ODC$.

9. **(a)** Докажите, что в описанном четырёхугольнике (это такой, **в который** можно вписать окружность) суммы длин противоположных сторон равны. **(b)** В трапеции $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, M — точка пересечения биссектрис углов A и B, N — точка пересечения биссектрис углов C и D. Докажите, что $2MN = |AB + CD - BC - AD|$.

10. Внутри каждой стороны параллелограмма выбрано по точке. Выбранные точки сторон, имеющих общую вершину, соединены. Докажите, что центры описанных окружностей четырёх получившихся треугольников являются вершинами некоторого параллелограмма.

11. Даны две окружности S_1, S_2 и прямая l. Проведите прямую m, параллельную прямой l, так, чтобы: **(a)** расстояние между точками пересечения m с окружностями S_1 и S_2 имело заданную величину a; **(b)** S_1 и S_2 высекали бы на m равные хорды;

12. Даны непересекающиеся хорды AB и CD окружности. Постройте точку X окружности так, чтобы AX и BX высекали на хорде CD отрезок EF, имеющий данную длину a.

13. На сторонах AC и AB прямоугольного треугольника ABC с прямым углом A взяты точки E и F соответственно так, что $\angle AEF = \angle ABC$. Точки E' и F' — основания перпендикуляров, опущенных на BC из точек E и F соответственно. Докажите, что $E'E + EF + FF' \leqslant BC$.

14. Докажите, что прямые, проведённые через середины сторон вписанного четырёхугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.

15. Окружности S_1 и S_2 радиуса 1 касаются в точке A; центр O окружности S радиуса 2 принадлежит S_1. Окружность S_1 касается S в точке B. Докажите, что прямая AB проходит через точку пересечения окружностей S_2 и S.

16. Произведение положительных чисел x, y, z равно 1. Докажите, что если

$$xy + yz + zx \geqslant x + y + z,$$

то для любого натурального k выполнено неравенство

$$x^ky^k + y^kz^k + z^kx^k \geqslant x^k + y^k + z^k.$$

17. Произведение положительных чисел a, b, c равно 8. Докажите, что

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right) \geqslant \frac{125}{8}.$$

18. В каждом из 100 сосудов лежит по 99 камней. Два игрока ходят по очереди. Каждый игрок при своем ходе должен взять по одному камню из 98 сосудов. Игрок, после хода которого два сосуда оказались пусты, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер?

19. Двое играют в игру. Первый игрок загадал число, а второй игрок за ход может назвать любые k различных чисел, не больших 100, после чего первый сообщает сумму задуманного числа и одного из названных чисел. При каком максимальном k второй всегда рано или поздно сможет угадать загаданное число?

20. Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, $n \geqslant 2$ и S — их сумма, то

$$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \ldots + \frac{a_n}{S-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

21. **(a)** Пусть $a_1 < a_2$ и $b_1 < b_2$. Докажите, что

$$a_1b_1 + a_2b_2 > a_1b_2 + a_2b_1.$$

(b) Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ и $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. Обозначим через $\sigma(i)$ образ числа i при некоторой фиксированной перестановке σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Докажите, что

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geqslant a_1b_{\sigma(1)} + a_2b_{\sigma(2)} + \ldots + a_nb_{\sigma(n)}.$$

(c) Докажите (в условиях предыдущего пункта), что

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n} \leqslant \frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}.$$

22. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превосходит: **(a)** 0,34; **(b)** 0,288.

23. Дан конечный набор многочленов с целыми коэффициентами. Докажите, что при некотором целом значении аргумента (одном и том же) значения всех этих многочленов — составные числа.

24. Многочлен, у которого все коэффициенты целые числа, а свободный член отличен от нуля, обладает следующим свойством: если $(a, b) > 1$, то и $(f(a), f(b)) > 1$. Докажите, что все числа $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$ имеют общий делитель, отличный от 1.

25. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 \equiv -1 \pmod p$ имеет решение (p – простое).

26. Натуральные числа $x, y > 1$ таковы, что $x^2+y^2-1 \,\vdots\, x+y-1$. Докажите, что число $x+y-1$ не может быть простым.

27. К числу справа приписывают тройки. Докажите, что рано или поздно получится составное число.

28. От клетчатой доски $m \times n$ ($m > 2$, $n > 2$) осталась только рамка ширины 1. За один ход можно выпилить одну или несколько клеток, образующих прямоугольник, лишь бы при этом оставшаяся часть не распалась на два куска. Кто не может сделать ход — проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

29. В Москве 7 высоток. Турист-математик хочет найти такую точку, из которой эти высотки видны в заданном порядке (начиная с МГУ, по часовой стрелке). Всегда ли ему удастся это сделать?

30. Через середину E диагонали AC четырёхугольника $ABCD$ провели прямую, параллельную диагонали BD. Она пересекла сторону BC в точке K. Докажите, что DK делит площадь четырёхугольника пополам.