

## Площадь.

**Определение–теорема.** Каждому многоугольнику на плоскости можно приписать неотрицательное вещественное число так, чтобы:

(а) если многоугольник  $M$  разрезан на многоугольники  $M_1, \dots, M_k$ , то число, приписанное  $M$ , было равно сумме чисел, приписанных многоугольникам  $M_1, \dots, M_k$ ;

(б) любому прямоугольнику со сторонами  $a$  и  $b$  было приписано число  $ab$ .

Более того, это можно сделать ровно одним способом. Приписанное таким образом многоугольнику число мы и назовём его *площадью*.

1.  $AP$  — чевиана в треугольнике  $ABC$ . Докажите, что  $S(ABP)/S(ACP) = BP/CP$ .

2. На продолжениях сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  треугольника  $ABC$  взяли точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$  соответственно так, что  $AB = BC_1$ ,  $BC = CA_1$ ,  $CA = AB_1$ . Найдите  $S(A_1B_1C_1)$ , если  $S(ABC) = 1$ .

3. На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника отметили точки  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. Известно, что  $AB = 5$ ,  $BB_1 = 2$ ,  $AC = 7$ ,  $CC_1 = 3$ . Найдите  $S(ABC)/S(AB_1C_1)$ .

4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . *Параллелограммом Вариньона* четырёхугольника  $ABCD$  называется четырёхугольник с вершинами в серединах сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ .

(а) Докажите, что параллелограмм Вариньона — параллелограмм.

(б) Докажите, что его площадь равна половине площади четырёхугольника.

5. Диагонали четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что  $S(ABO) = S(CDO)$  тогда и только тогда, когда  $BC \parallel DA$ .

6. Средняя линия делит площадь четырёхугольника пополам. Докажите, что в нём есть две параллельные стороны.

7. На плоскости нарисовали два четырёхугольника так, что середины их сторон соответственно совпали. Докажите, что их площади равны.

8. Треугольники  $AB_1C_1$  и  $AB_2C_2$  имеют общий угол  $A$ . Докажите, что

$$\frac{S(AB_1C_1)}{S(AB_2C_2)} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB_2 \cdot AC_2}.$$

9. Через середину  $E$  диагонали  $AC$  четырёхугольника  $ABCD$  провели прямую, параллельную диагонали  $BD$ . Она пересекла сторону  $BC$  в точке  $K$ . Докажите, что  $DK$  делит площадь четырёхугольника пополам.