Лепреконы

14 марта 2015 г.

Дискретная непрерывность.

Если некоторая целочисленная величина время от времени меняется (увеличивается или уменьшается) не более, чем на 1, то она принимает все значения между начальным и конечным. Эта величина называется *дискретной*, а предыдущее утверждение – принципом *дискретной непрерывности.*

1. Федя начал писать Лёше сообщения по поводу занятий. Наконец, после 100-го сообщения Лёша сподобился ответить Феде, и между ними завязалась оживленная переписка. В какой-то день после этого Федя был настолько занят, что Лёше пришлось отправить 50 писем, прежде чем достучаться до него. Докажите, что найдется отрезок времени, в течение которого они отправили друг другу ровно по 30 писем.

2. Вася выписывает натуральные числа, первое из которых равно 1. Каждое следующее число или на 1 больше предыдущего, или является собственным делителем предыдущего. Последнее равно 1000. Докажите, что в строке найдется число 123.

3. В ряд сидят 15 мальчиков и 15 девочек.

(a) Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

(b) Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?

4. По кругу сидят 15 мальчиков и 15 девочек.

(a) Докажите, что можно выбрать 20 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

(b) Докажите, что для каждого $2n = 2, 4, \ldots, 30$ можно выбрать $2n$ школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

5. **(a)** На плоскости есть $2n$ точек. Докажите, что можно провести прямую так, что с каждой стороны от нее будет находиться n точек.

(b) На плоскости есть $2n + 1$ точка, никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что через любую из них можно провести прямую так, что с каждой стороны от нее будет находиться n точек.

---

6. Докажите, что число $5^n - 1$ не может делиться на число на $4^n - 1$.

7. От клетчатой доски $m \times n$ ($m > 2$, $n > 2$) осталась только рамка ширины 1. За один ход можно выпилить одну или несколько клеток, образующих прямоугольник, лишь бы при этом оставшаяся часть не распалась на два куска. Кто не может сделать ход — проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

8. Каждый из 102 человек имеет не менее 68 знакомых. Докажите, что найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

9. В городе живут трезвенники и алкоголики. Каждый день некоторый человек, у которого более половины знакомых ведут образ жизни, отличный от его образа жизни, меняет свои взгляды. Докажите, что рано или поздно изменения взглядов прекратятся.

10. За круглым столом сидит четное число людей. Количество денег у любых двух соседей отличается не более, чем на 100 руб. Докажите, что найдутся два человека, сидящих напротив друг друга, у которых количество денег так же отличается не более, чем на 100 руб.

11. В Москве 7 высоток. Турист-математик хочет найти такую точку, из которой эти высотки видны в заданном порядке (начиная с МГУ, по часовой стрелке). Всегда ли ему удастся это сделать?