Лепреконы

28 февраля 2015 г.

Разнобой по ТЧ.

Маленькое число не может делиться на большое. Если $ab \vdots c$ **и** $(a, c) = 1$**, то** $b \vdots c$**. Если** $a \vdots b$**, то** $a \pm b \vdots b$.

1. Докажите, что ни при каком натуральном m число $1978^m - 1$ не делится на $1000^m - 1$.

Полезно смотреть, как числа раскладываются на простые множители.

2. Можно ли расставить по кругу 2011 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

Полезно представлять числа a **и** b **в виде** $a = a'd, b = b'd$**, где** $d = (a, b)$.

3. Найдите все четверки (a, b, m, n) натуральных чисел, для которых $(a^2 + b^2)^m = (ab)^n$.

Полезно писать какие-то неравенства.

4. Докажите, что не существует таких натуральных m, n, что $m^2 + n$ и $n^2 + m$ – квадраты.

Принцип Дирихле.

5. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 \equiv -1 \pmod p$ имеет решение (p – простое).

Сравнение по модулю

6. Найдите все n такие, что $n! + 5$ – куб.

Если $a < b$**, то** $a \leqslant b - 1$.

7. Решите уравнение в натуральных числах $n! + 5(m!) = k!$.

---

8. Докажите, что сумма квадратов трёх натуральных чисел, уменьшенная на 7, не делится на 8.

9. Докажите, что в вершинах любого многогранника можно расставить натуральные числа так, чтобы числа в вершинах, связанных ребром, имели общий делитель больше 1, а в вершинах, не связанных ребром — не имели.

10. Существует ли такое натуральное n, что $n^2 + n + 1 \vdots 1955$?

11. Натуральные числа $x, y > 1$ таковы, что $x^2 + y^2 - 1 \vdots x + y - 1$. Докажите, что число $x + y - 1$ не может быть простым.

12. Несколько крутых школьников заимели несколько папирос, у всех поровну. Время от времени какие-то школьники раздают каждому из остальных поровну из своих папирос. После многократного повторения такой процедуры у одного осталось 23 папиросы, а у другого — 6 папирос. Сколько было крутых школьников?

13. Натуральные числа m и n таковы, что $m^2 + n^2 + m$ делится на mn. Докажите, что m является квадратом натурального числа.

14. К числу справа приписывают тройки. Докажите, что рано или поздно получится составное число.