Лепреконы

21 февраля 2015 г.

Двудольные графы.

Определение. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет ребер с концами одинакового цвета.

Видим двудольный граф.

1. На прямоугольной доске нарисованы несколько неперекрывающихся равносторонних треугольников. У каждого есть сторона, параллельная нижнему краю доски. Докажите, что треугольники можно покрасить в два цвета так, чтобы треугольники одинакового цвета не соприкасались по отрезку.

При движении по пути по двудольному графу цвета вершин чередуются.

2. Замок в форме треугольника со стороной 50 метров разбит на 100 треугольных залов со сторонами 5 м. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?

3. На прямой сидят три кузнечика. Каждую минуту один из кузнечиков перепрыгивает ровно через одного другого (в одной точке два кузнечика оказаться не могут). Могут ли все кузнечики оказаться на своих местах ровно через 777 прыжков?

Суммы степеней вершин в долях равны.

4. На шахматной доске стоит несколько коней. Каждый конь на белом поле бьет 3 коня, а каждый конь на черном поле бьет 4 коня. Докажите, что общее число коней кратно семи.

Теорема (критерий двудольности графа). Граф — двудольный $\Longleftrightarrow$ в нем нет циклов нечетной длины.

5. В связном двудольном графе степени всех вершин равны $k > 1$. Докажите, что при удалении любого ребра граф по-прежнему останется связным.

6. 10 алкоголиков образовали компанию для совместного времяпрепровождения. В компании всегда не менее 3-х человек. Каждый вечер в компанию добавляется один человек, либо из нее исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы компаний ровно по одному разу?

7. В строку выписано 11 целых чисел. Для любой группы подряд идущих чисел подсчитана ее сумма (группы из одного числа тоже учитывались). Какое наибольшее количество сумм могло оказаться нечетными?

8. (a) На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в симметричную ей относительно средней линии позицию ровно за 1111 ходов?

(b) На шахматной доске стоят пять одинаковых фишек. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в центрально симметричную ей позицию ровно за 1111 ходов?