Лепреконы

14 февраля 2015 г.

Многочлены с целыми коэффициентами.

1. Докажите, что для любого многолена $P(x)$ с целыми коэффициентами и целых чисел a и b число $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.

2. Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $P(-1) = 2$ и $P(1) = 1$.

3. Известно, что многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$ принимает нечётные значения при $x = 1$ и $x = 0$. Докажите, что он не имеет целых корней.

4. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$. Докажите, что $P(n)$ кратно трем для любого целого n.

5. Все коэффициенты многочлена $P(x)$ — целые числа. Известно, что $P(1) = 1$ и $P(n) = 0$. Каким может быть n?

6. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, причём $P(2)$ делится на 5, а $P(5)$ делится на 2. Докажите, что $P(7)$ делится на 10.

7. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, причём известно, что уравнения $P(x) = 1$, $P(x) = 2$ и $P(x) = 3$ имеют целые корни. Докажите, что уравнение $P(x) = 5$ не может иметь больше одного целого корня.

8. Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше 1000 и $P(19) = P(94) = 1994$.

9. Докажите, что не существует многочлена с целыми коэффициентами $P(x)$, отличного от константы, значения которого при всех $x = 1, 2, \ldots$ были бы простыми числами.

10. Дан конечный набор многочленов с целыми коэффициентами. Докажите, что при некотором целом значении аргумента (одном и том же) значения всех этих многочленов — составные числа.

11. Многочлен, у которого все коэффициенты целые числа, а свободный член отличен от нуля, обладает следующим свойством: если $(a, b) > 1$, то и $(f(a), f(b)) > 1$. Докажите, что все числа $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$ имеют общий делитель, отличный от 1.