7 февраля 2015 г.

Разнобой по геометрии

Напомним, что мы прошли темы поворот, осевая и центральная симметрия, а так же параллельный перенос. Ещё, давным давно, мы проходили вписанные углы. Там было сформулировано 5 основных утверждений:

- Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ (или просто, если есть 4 точки на одной окружности в указанном порядке) выполнено равенство вписанных углов $\angle BCA = \angle BDA$.
- Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ сумма противоположных углов равна 180°, то есть $\angle ABC + \angle CDA = \angle BCD + \angle DAB = 180^\circ$.
- Обратное утверждение к первому пункту. То есть, если точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB и $\angle CAD = \angle CBD$, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности.
- Обратное утверждение к второму пункту. Если в четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°, то он вписанный.
- Главное утверждение, из которого всё выводится и которое не надо забывать: центральный угол в два раза больше, вписанного опирающегося на ту же дугу.

Теперь докажите важное дополнение к этим 5 фактам:

1. Лемма об угле между хордой и касательной. Пусть есть окружность и точки A, B и C на ней. В точке A проведена касательная к этой окружности AK, причём точки K и C лежат по разную сторону от прямой AB. Тогда $\angle BAK = \angle ACB$.

2. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E; AD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE = ED$.

3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Через точку B проходит прямая XY, причём X лежит на ω_1, а Y — на ω_2. В точках X и Y провели касательные к окружностям, на которых эти точки лежат. Обозначим точку пересечения этих касательных через P. Докажите, что точки A, X, P, Y лежат на одной окружности.

4. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяли точки C', A' и B' соответственно. Описанные окружности треугольников $A'BC'$ и $C'AB'$ пересекаются вторично в точке X, лежащей внутри треугольника ABC. Докажите, что четырёхугольник $B'CA'X$ вписанный.

5. На окружности с центром в точке O выбраны точки A и B. К описанной окружности треугольника OAB провели касательную в точке A, которая вторично пересекает исходную окружность в точке C. Докажите, что $AC = AB$.

6. Даны две концентрические окружности. Постройте прямую, на которой эти окружности будут высекать три равных отрезка.

7. Постройте равносторонний треугольник ABC так, чтобы его вершины лежали на трёх данных параллельных прямых.

8. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превосходит: а) 0,34; б) 0,288.

9. На сторонах BC и CA остроугольного треугольника ABC построены равносторонние треугольники BCA' и CAB', причем первый из этих треугольников построен наружу, а второй — вовнутрь, причём точка B' оказалась внутри треугольника ABC. Точка C' симметрична точке C относительно стороны AB. Докажите, что точки A', B', C' лежат на одной прямой.

10. В треугольнике ABC на стороне AC выбрали точку K. Точки P и Q симметричны точке K относительно сторон AB и BC. Оказалось, что прямая BK делит отрезок PQ пополам. Докажите, что угол KBC равен одному из углов треугольника KPQ.