Лепреконы

31 января 2015 г.

Неравенства-2.

1. Для положительных a, b, c докажите неравенство:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3.$$

2. Докажите неравенство о среднем гармоническом и среднем геометрическом:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

3. (a) Найдите $\max\limits_{x \geqslant 0} (1+3x)(1+4x)(1-7x)$.

(b) Найдите $\max\limits_{x \geqslant 0} (1-x)^5(1+x)(1+2x)^2$.

(c) Найдите $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} x(1-x)^{2008}$.

(d) Найдите $\min\limits_{x > 0} x^2 + \frac{1}{x^3}$.

4. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство:

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} > 1.$$

5. Для положительных a, b, c докажите неравенство:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geqslant 6.$$

6. Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, $n \geqslant 2$ и S — их сумма, то

$$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \ldots + \frac{a_n}{S-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

7. (a) Пусть $a_1 < a_2$ и $b_1 < b_2$. Докажите, что

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 > a_1 b_2 + a_2 b_1.$$

(b) Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ и $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. Обозначим через $\sigma(i)$ образ числа i при некоторой фиксированной перестановке σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Докажите, что

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \geqslant a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \ldots + a_n b_{\sigma(n)}.$$

(c) Докажите (в условиях предыдущего пункта), что

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leqslant \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n}.$$