Лепреконы

20 декабря 2014 г.

Неравенства

1. Положительные числа a и b удовлетворяют условию $ab > 2009a + 2010b$. Докажите, что $a + b > \left(\sqrt{2009} + \sqrt{2010}\right)^2$.

2. Пусть $n > 1$ — натуральное число, $a > b > 0$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \ldots + \frac{1}{a+nb} < \frac{n+1}{a+\frac{b}{2}}.$$

3. Пусть $x \leqslant y \leqslant z$ — **(a)** вещественные; **(b)** положительные вещественные числа такие, что $xy + yz + zx = 1$. Докажите, что $xz < 1/2$.

4. Докажите, что если $x + y = 1$, то $\left|(x^3 - 1)(y^3 - 1)\right| \geqslant 3xy$.

5. Натуральные числа a, b, c, x, y, z удовлетворяют равенствам $a^2 + b^2 = c^2$ и $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что $(a + x)^2 + (b + y)^2 \leqslant (c + z)^2$.

6. Произведение положительных чисел x, y, z равно 1. Докажите, что если

$$xy + yz + zx \geqslant x + y + z,$$

то для любого натурального k выполнено неравенство

$$x^k y^k + y^k z^k + z^k x^k \geqslant x^k + y^k + z^k.$$

7. Докажите, что для любых положительных чисел x и y выполнено неравенство

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leqslant \frac{1}{xy}.$$

8. Докажите, что для любых положительных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3 + x^3}{z^2 + x^2} \geqslant x + y + z.$$

9. Произведение положительных чисел a, b, c равно 8. Докажите, что

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(c + \frac{1}{c}\right) \geqslant \frac{125}{8}.$$