Лепреконы
13 декабря 2014 г.

По мотивам сборов

1. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка P такая, что $\angle ABP = \angle BAP = 15^\circ$. Докажите, что треугольник CDP — равносторонний.

2. BD — биссектриса угла B треугольника ABC. Точка E выбрана таким образом, что $\angle EAB = \angle ACB$, $AE = DC$ и отрезки ED и AB пересекаются в точке K. Докажите, что $KE = KD$.

3. Назовём число *неадекватным*, если количество различных его простых делителей превосходит наименьший из них. Есть ли 2014 неадекватных чисел подряд?

4. Пусть $S(n)$ — сумма цифр числа n, $T(n)$ — сумма всех чисел, получаемых отбрасыванием у числа n одной, двух, и так далее цифр справа. Докажите, что $n = S(n) + 9T(n)$.

5. Сережа делил натуральное число на 2007 и в каком-то месте после запятой получил четыре девятки подряд. Докажите, что он ошибся.

6. $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ — периодическая последовательность цифр. Докажите, что если из этой последовательности вычеркнуть все цифры, стоящие на местах с номерами, кратными данному k, полученная последовательность цифр тоже будет периодической.

7. В последовательности $a_1 = a_2 = 1$, $a_{k+1} = a_k + 1/a_{k-1}$ при $k \geqslant 2$. Докажите, что $a_n^2 \geqslant 2n$ при всех $n \geqslant 4$.

8. Последовательность F_n чисел Фибоначчи определяется следующим образом: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n \geqslant 2$. a) Докажите, что $F_{5k} \,\vdots\, 5$. b) Докажите, что найдутся такие различные натуральные n и k, что $F_n \equiv F_k \pmod{101}$ и $F_{n+1} \equiv F_{k+1} \pmod{101}$. c) Докажите, что найдётся такое $n > 2$, что F_n оканчивается на 000001, а F_{n+1} на 000002.

9. Решите в целых числах уравнение $x^3 + 5y^3 + 25z^3 = 0$.

10. Решите в целых числах уравнение $2^x + 7 = y^2$.

11. Найдите все простые p, для которых $p^3 + 2p^2 + 1$ — степень четвёрки.

Лепреконы
13 декабря 2014 г.

По мотивам сборов

1. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка P такая, что $\angle ABP = \angle BAP = 15^\circ$. Докажите, что треугольник CDP — равносторонний.

2. BD — биссектриса угла B треугольника ABC. Точка E выбрана таким образом, что $\angle EAB = \angle ACB$, $AE = DC$ и отрезки ED и AB пересекаются в точке K. Докажите, что $KE = KD$.

3. Назовём число *неадекватным*, если количество различных его простых делителей превосходит наименьший из них. Есть ли 2014 неадекватных чисел подряд?

4. Пусть $S(n)$ — сумма цифр числа n, $T(n)$ — сумма всех чисел, получаемых отбрасыванием у числа n одной, двух, и так далее цифр справа. Докажите, что $n = S(n) + 9T(n)$.

5. Сережа делил натуральное число на 2007 и в каком-то месте после запятой получил четыре девятки подряд. Докажите, что он ошибся.

6. $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ — периодическая последовательность цифр. Докажите, что если из этой последовательности вычеркнуть все цифры, стоящие на местах с номерами, кратными данному k, полученная последовательность цифр тоже будет периодической.

7. В последовательности $a_1 = a_2 = 1$, $a_{k+1} = a_k + 1/a_{k-1}$ при $k \geqslant 2$. Докажите, что $a_n^2 \geqslant 2n$ при всех $n \geqslant 4$.

8. Последовательность F_n чисел Фибоначчи определяется следующим образом: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n \geqslant 2$. a) Докажите, что $F_{5k} \,\vdots\, 5$. b) Докажите, что найдутся такие различные натуральные n и k, что $F_n \equiv F_k \pmod{101}$ и $F_{n+1} \equiv F_{k+1} \pmod{101}$. c) Докажите, что найдётся такое $n > 2$, что F_n оканчивается на 000001, а F_{n+1} на 000002.

9. Решите в целых числах уравнение $x^3 + 5y^3 + 25z^3 = 0$.

10. Решите в целых числах уравнение $2^x + 7 = y^2$.

11. Найдите все простые p, для которых $p^3 + 2p^2 + 1$ — степень четвёрки.