Лепреконы

06 декабря 2014 г.

Китайская теорема об остатках.

Китайская теорема об остатках. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_k$ — попарно взаимно простые числа, a_i — некоторый набор целых чисел. Тогда существует такое число A, что

$$A \equiv a_1 \pmod{m_1},\ A \equiv a_2 \pmod{m_2},\ \ldots,\ A \equiv a_k \pmod{m_k},$$

причём любые два таких числа сравнимы по модулю $m = m_1 \ldots m_k$.

1. (сдаётся только целиком) **(a)** Число разделили с остатком на 7 и на 17. Сколько могло получиться пар остатков?

(b) Сколько есть натуральных чисел от 1 до $7 \cdot 17$?

(c) Два числа A_1 и A_2 дают одинаковые остатки при делении на 7 и на 17. Докажите, что их разность делится на $7 \cdot 17$.

(d) Докажите КТО для $n = 2$.

(e) Докажите КТО для произвольного n.

2. Найдите остаток при делении 36^{99} на $37 \cdot 5$.

3. Генерал хочет построить для парада своих солдат в одинаковые квадратные каре (размера $n \times n$, $n > 1$), но он не знает сколько солдат (от 1 до 4) находится в лазарете. Докажите, что у генерала может быть такое количество солдат, что он, независимо от заполнения лазарета, сумеет выполнить свое намерение.

4. Число называется *свободным от кубов*, если оно не делится на куб натурального числа, большего 1. Докажите, что для любого n найдется n последовательных чисел, не свободных от кубов.

5. Докажите, что для любого натурального n существуют n последовательных натуральных чисел, никакое из которых не является степенью натурального числа.

6. Вы предлагаете кому-нибудь задумать двузначное число и сказать Вам остатки от деления этого числа на 3, 5 и 7. Как по этим данным легко и непринуждённо отгадать задуманное число?

7. Сколько различных остатков дают квадраты целых чисел при делении на $3 \times 5 \times 8$?

8. Дано конечное множество натуральных чисел A. Докажите, что существует такое натуральное b, что для каждого $a \in A$ число ab будет степенью натурального числа.