Лепреконы

8 ноября 2014 г.

Симметрия

Определение. Симметрией относительно точки O называется такое преобразование плоскости, которое каждую точку P плоскости переводит в такую точку P', что $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OP'}$. На пальцах, каждая точка плоскости симметрично отражается относительно точки O.

Определение. Симметрией относительно прямой l называется такое преобразование плоскости, которое каждую точку плоскости P переводит в такую точку P', что отрезок PP' перпендикулярен прямой l и делится ею пополам (другими словами l является серединным перпендикуляром к отрезку PP'). На пальцах, каждую точку плоскости симметрично отразили относительно прямой l. Это преобразование называют также **осевой симметрией**, а саму прямую l **осью симметрии**.

Определение. Движением плоскости называется такое преобразование плоскости, при котором сохраняются расстояния между точками. То есть такие преобразования F плоскости для которых $|AB| = |F(A)F(B)| = |A'B'|$, где мы обозначили через $F(A) = A'$ и $F(B) = B'$ образы точек A и B соответственно.

1. Докажите, что при движении ... окружность переходит в окружность. :)

2. Докажите, что четырёхугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом.

3. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M. Через точки A, B, C и D проведены прямые, параллельные прямым MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что они пересекаются в одной точке.

4. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. Оказалось, что $\angle ABM = 2\angle BAM$, а $BC = 2BM$. Найдите углы треугольника.

5. Двое игроков поочерёдно выкладывают на прямоугольный стол пятаки. Монету разрешается класть только на свободное место. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Докажите, что первый игрок всегда может выиграть.

6. Даны точки A и B по одну сторону от прямой l. Постройте такую точку C на прямой l, для которой сумма $AC + CB$ была бы минимальной возможной.

7. Окружность пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 соответственно. Докажите, что если перпендикуляры к сторонам треугольника, проведённые через точки A_1, B_1 и C_1, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры к сторонам, проведённые через точки A_2, B_2 и C_2, тоже пересекаются в одной точке.

8. Внутри угла A дана точка M. Постройте треугольник ABC с углом A и медианой AM.

9. Точки D и E — основания перпендикуляров, опущенных из вершины A треугольника ABC на биссектрисы углов B и C. a) Докажите, что прямые DE и BC параллельны. b) Докажите, что если $AD = AE$, то треугольник ABC равнобедренный.

10. Точка M лежит на диаметре AB окружности. Хорда CD проходит через M и пересекает AB под углом 45°. Докажите, что сумма $CM^2 + DM^2$ не зависит от выбора точки M.

11. На сторонах AC и AB прямоугольного треугольника ABC с прямым углом A взяты точки E и F соответственно так, что $\angle AEF = \angle ABC$. Точки E' и F' — основания перпендикуляров, опущенных на BC из точек E и F соответственно. Докажите, что $E'E + EF + FF' \leqslant BC$.

12. Докажите, что прямые, проведённые через середины сторон вписанного четырёхугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.

13. Окружности S_1 и S_2 радиуса 1 касаются в точке A; центр O окружности S радиуса 2 принадлежит S_1. Окружность S_1 касается S в точке B. Докажите, что прямая AB проходит через точку пересечения окружностей S_2 и S.