Лепреконы
1 ноября 2014 г.

Поворот

Определение. Поворотом с центром в точке O и углом α называется преобразование плоскости, которое каждую точку A переводит в точку A' такую, что $|OA| = |OA'|$ и луч OA при вращении на угол α *против часовой стрелки* переходит в луч OA' (соответственно, если $\alpha < 0$, то нужно вращать на угол $|\alpha| = -\alpha$ *по часовой стрелке*). На пальцах, вся плоскость поворачивается относительно точки O на угол α против часовой стрелки.

1. Докажите, что при повороте окружность переходит в окружность.

2. a) Докажите, что середины сторон правильного n-угольника образуют правильный n-угольник. b) Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата образуют квадрат.

3. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC, AB_1 и ABC_1. Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

4. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE; M и P — середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM равносторонний.

5. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K так, что периметр треугольника MCK равен удвоенной стороне квадрата. Найдите величину угла MAK.

6. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причём $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

7. Шестиугольник $ABCDEF$ правильный, K и M — середины отрезков BD и EF. Докажите, что треугольник AKM правильный.

8. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P. Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P, из A_2 — на A_3P, из A_3 — на A_4P, из A_4 — на A_1P. Докажите, что все четыре перпендикуляра пересекаются в одной точке.

9. Два квадрата $BCDA$ и $BKNM$ имеют общую вершину B. Докажите, что медиана BE треугольника ABK и высота BF треугольника CBM лежат на одной прямой. (Вершины обоих квадратов перечислены по часовой стрелке.)

10. Точка M лежит на дуге AB описанной окружности правильного треугольника ABC. Докажите, что $MC = MA + MB$.

11. У треугольника ABC все углы меньше $120°$. Выбирается такая точка T, что сумма $TA+TB+TC$ минимальна. Докажите, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$.

12. Дан треугольника ABC. На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.