Лепреконы

04 октября 2014 г.

Малая теорема Ферма.

1. (Малая теорема Ферма, формулировка 1.) Для простого p и натурального n выполнено $n^p - n \,\vdots\, p$ (то же самое, $n^p \equiv n \pmod{p}$).

2. (Малая теорема Ферма, формулировка 2.) Для простого p и натурального a, **не кратного** p, выполнено $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

3. Докажите равносильность двух формулировок МТФ.

4. (a) Докажите, что $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ (возводим в степень p по модулю p как тупые).

(b) Докажите МТФ в первой формулировке.

5. (a) Докажите, что для любого a с условием $(a, p) = 1$ (p – простое) числа $1a, 2a, \ldots, (p-1)a$ дают разные остатки по модулю p.

(b) Перемножив $1a, 2a, \ldots, (p-1)a$, докажите МТФ во второй формулировке.

6. Решите следующие упражнения.

(a) Докажите, что $30^{300} - 1$ делится на 1001.

(b) Найдите все такие простые числа p, что $5^p + 1$ кратно p.

7. Докажите, что ни при каком целом k число $k^2 + k + 1$ не делится на 101.

8. (a) Докажите, что любой простой делитель q числа $2^p - 1$ (p – нечётное простое) имеет вид $q = 2pk + 1$.

(b) Докажите, что для каждого нечётного простого p существует хотя бы одно простое число вида $2pk + 1$.

9. Докажите, что для каждого простого p существует хотя бы одно число вида $2014^n - n$, делящееся на p.

Для самостоятельного решения

10. Докажите, что число $30^{239} + 239^{30}$ – составное.

11. Докажите, что для составного числа 561 справедлив аналог малой теоремы Ферма: если $(a, 561) = 1$, то выполняется сравнение $a^{560} \equiv 1 \pmod{561}$. Числа, обладающие этим свойством, называются *числами Кармайкла.* В 1994 году было доказано, что чисел Кармайкла бесконечно много.

12. Докажите, что ни для какого натурального n число $2^n - 1$ не делится на n.