Лепреконы

20 сентября 2014 г.

Индукционные рассуждения.

1. n-угольник разбили непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что проведено $n-3$ диагоналей и получилось $n-2$ треугольника.

2. Выпуклый n-угольник разбили непересекающимися диагоналями на треугольники. За один ход можно взять два треугольника с общей стороной, и сменить диагональ получившегося четырёхугольника на другую. Докажите, что такими операциями можно получить любую другую триангуляцию.

3. Докажите, что прямоугольник $m \times n$ режется на уголки из 3 клеток чётным числом способов.

4. Докажите, что любое натуральное число от 1 до $n!$ можно представить в виде суммы не более чем n делителей числа $n!$.

5. Прямоугольник разбит на доминошки. Докажите, что его клетки можно раскрасить в два цвета так, чтобы любая доминошка в данном разбиении содержала клетки разных цветов, но в любом другом разбиении этого прямоугольника на доминошки нашлась бы доминошка, содержащая две клетки одного цвета.

6. k и n — натуральные числа, большие 1. В группе из kn человек каждый знаком более, чем с $(k-1)n$ из остальных. Докажите, что можно выбрать $k+1$ человека так, что все они знакомы друг с другом.

Для самостоятельного решения

7. В n одинаковых мензурок налиты n разных жидкостей, кроме того, имеется одна пустая мензурка. Докажите, что можно составить равномерные смеси в каждой мензурке (то есть сделать так, чтобы в каждой мензурке было ровно $1/n$ от начального количества каждой жидкости), и при этом одна мензурка была бы пустой. Отмерять можно любой объём жидкости (в пределах объёма мензурки).

8. На бесконечной клетчатой доске эволюционирует «жизнь». Вначале все клетки были белыми, а потом n из них стали вдруг черными. Каждую минуту клетка красится в тот цвет, которого больше среди трех клетов: ее самой, соседа справа и соседа сверху. Докажите, что

(a) рано или поздно все черные клетки исчезнут;

(b) это случится не более, чем через n минут.