

Серия 8. Перечислительная комбинаторика. 22.11

Правило умножения и простой подсчёт

1. Автобусные билеты имеют шестизначные номера от 000000 до 999999.
 - а) Сколько всего номеров?
 - б) Сколько номеров не содержат цифру 6?
 - в) Сколько номеров не содержат цифры 2 и 3?
 - г) Сколько номеров, у которых есть хотя бы одна нечётная цифра?
2. На прямой отмечено 22 точки, на параллельной ей 11. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
3. а) В книжном магазине лежат 6 разных изданий романа И. С. Тургенева “Рудин”, 3 издания его же романа “Отцы и дети” и 4 издания романа “Дворянское гнездо”. Кроме того, есть 5 различных сборников, в каждом из которых есть романы “Рудин” и “Дворянское гнездо”, и 7 сборников с романами “Дворянское гнездо” и “Отцы и дети”. Сколькими способами можно сделать покупку соержащую по одному экземпляру каждого романа?
 - б) А если в магазине есть еще три сборника, содержащие романы “Рудин” и “Отцы и дети”, и 5 книг содержащих все три романа?
 - в) А если в магазине есть еще один роман И. С. Тургенева “Дневник лишнего человека” в 2 изданиях и требуется купить все четыре романа?
 - г*) Назовите еще какие-нибудь произведения И. С. Тургенева, которые вы читали.
4. Найдите сумму всех пятизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4.

Размещения

5. Скольким количеством способов можно выстроить n человек в ряд?
6. Сколько слов можно получить переставляя буквы слова а) "НАДО" б) "БОТАТЬ" в) "ЛИСТИКИ"?
7. Каким количеством способов можно выбрать из 50 а) пару б) тройку в) две пары носков, носки почему-то все разного цвета?
8. а) Сколькими способами можно встроить n людей в хоровод?
 - б) А сколько существует бус из n разноцветных бусинок?
9. Дана таблица $m \times n$. Сколько сполсобов заполнить её ± 1 так, чтобы произведение чисел в каждом столбце и в каждой строке было равно 1.
10. Каким количеством способов можно разбить 12 человек на пары?

Числа сочетаний

Обозначим через C_n^k количество способов выбрать из n различных предметов k .

11. Найдите C_n^1 и C_n^2 .

12. Из 10 мальчиков в классе нужно выбрать троих для участие в соревновании по бегу. Сколькими способами это можно сделать?

13. Доктор Ватсон должен отдежурить в больнице 5 дней в месяц. Сколько для него различных вариантов расписания на ноябрь?

14. Группа состоит из 10 артистов и 5 животных. Скольким способами можно выбрать из нее в течение двух вечеров по 6 человек и 2 животных для участия в представлениях так, чтобы эти составы не совпадали друг с другом?

15. Докажите, что $C_{10}^6 = C_{10}^4$.

16. Сколькими способами можно разбить 15 человек на три группы по 5 человек в каждой?

17. Найдите количество способов пройти хромой ладьей из клетки a1 в клетку f8.

18. Сколько существует 10-ых чисел, все цифры которых различны, а цифры 3, 6, 9 идут в порядке возрастания?

19. Докажите следующие формулы: а) $C_n^k = \frac{n}{k} \cdot C_{n-1}^{k-1}$ б) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

20. Найдите формулу для C_n^k .

Сложные задачи на числа сочетаний

21. Докажите следующие тождества:

а) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

б) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}$

в) $C_{2n}^n = C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + C_n^2 C_n^{n-2} + \dots + C_n^n C_n^0 = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2$

22. Докажите, что $(x+1)^n = x^n + nx^{n-1} + C_n^{n-2}x^{n-2} + \dots + C_n^2x^2 + nx + 1$