Серия 22. Индукция. 4 апреля

*Если каждая доминошка, падая,
толкает следующую, то все они упадут…*

Пример 1. Вокруг города проходит кольцевая дорога с односторонним движением, и через город проходит несколько магистралей с односторонним движением. Докажите, что есть такой квартал (не разбитый магистралями на части), вокруг которого можно объехать, не нарушая правил.

Пример 2. ("Ханойские башни") Есть три вертикальных палочки. На одну из них надето n колечек разного диаметра по убыванию снизу вверх. Докажите, что можно переложить все колечки на другую палочку в том же порядке, перекладывая за раз одно колечко и не кладя большее на меньшее.

Пример 3. Докажите, что $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Задачи

В следующих задачах для любого натурального n нужно доказать формулы.

1. $1 + 3 + \ldots + 2n - 1 = n^2$.

2. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. В квадрате $2^n \times 2^n$ удалили произвольную клетку. Докажите, что оставшуюся доску можно разрезать на уголки из трёх клеток.

5. В прямоугольнике $3 \times n$ расставлены фишки трех цветов по n каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце все три фишки стали разными.

6. В трех бочках содержится в сумме 2^n литров воды, причем в каждой целое число литров. Разрешается выбрать две бочки и перелить из одной в другую столько воды, сколько там уже есть. Докажите, что можно собрать всю воду в одной бочке (если бочки достаточно большие).

7. Докажите, что если в выпуклом многоугольнике проведены несколько непересекающихся диагоналей, то по каждую сторону от любой из них найдется вершина, из которой не выходит ни одной диагонали.

8. Из чисел от 1 до $2n$ выбрали $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел есть два, одно из которых делится на другое.

9. На кольцевом шоссе стоят несколько автомобилей с общим запасом бензина, достаточным, чтобы объехать весь круг. Докажите, что можно сесть в один из автомобилей и проехать все шоссе, забирая по дороге бензин у остальных автомобилей.

10. На ежегодный слет-проверку съехались 100 бригад СЭС и поселились в 100 корпусах. Каждая бригада хочет проверить три корпуса (заранее сообщая номера начальнику лагеря) и тут же уехать из лагеря. Докажите, что начальник может составить расписание проверок так, чтобы никакую бригаду не проверяли более трех раз (проверять пустые корпуса можно сколько угодно раз).

11. Докажите, что $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2}$.

12. Докажите, что в компании из 2^{n+m} человек найдутся n человек, любые два из которых дружат, или m человек, любые два из которых не дружат.

Новые, но не очень сложные

13. На какое наибольшее количество частей 15 прямых могут разбить плоскость?

14. Несколько прямых разбили плоскость на части. Докажите, что их можно раскрасить в два цвета, чтобы одноцветные части не граничили.

15. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет присутствует и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника вершины были трех разных цветов.