Кружок в Хамовниках. 6 класс

Серия 2. Кролики и клетки. 20.09

1. В 10 клетках сидит 102 кролика. Докажите, что хотя бы в одной из клеток сидит не менее 11 кроликов.

2. В 14 клетках сидит 90 кроликов. Докажите, что в каких-то двух клетках сидит одинаковое количество кроликов.

3. На доске написано 2014 чисел. Докажите, что из них можно выбрать 11 так, чтобы разность любых двух из них делилась на 199.

4. а) На доске написано 51 число. Докажите, что разность квадратов каких-то двух из них делится на 100.
б) Для какого наименьшего количества чисел можно гарантированно утрверждать, что разность квадратов каких-то двух из них делится на 100?

5. а) Докажите, что из 100 чисел можно выбрать несколько так, чтобы их сумма делилась на 100.
б) Докажите, что если из 99 чисел нельзя выбрать несколько так, чтобы их сумма делилась на 100, то разность любых двух из этих чисел делится на 100.

6. В классе 20 детей. Каждый день какие-то пары из них при встрече пожимают друг другу руки, а какие-то нет. Известно, что всего за месяц было совершено 2014 рукопожатий. Докажите, что можно выделить группу из 7 человек так, чтобы между детьми из этой группы было совершено не менее 211 рукопожатий.

7. В квадрате со стороной 10 отметили 26 точек. Докажите, что расстояние между какими-то отмеченными точками меньше 3.

8. Карта Москвы масштаба 1 : 45000 разрезана на 60 прямоугольников 9×13 см. После того, как прямоугольники совместили, получился атлас.

Докажите, что иглой можно проткнуть этот атлас так, чтобы хотя бы на 10 листах было проткнуто что-нибудь зелёное.

Справочная информация: общая площадь садов, скверов и парков Москвы составляет 343 км^2.

9. Вася выписывает подряд натуральные числа, но забывает ставить между ними пробелы. В результате у него получается длинная последовательность цифр. Докажите, что он может так прервать эту последовательность, чтобы получилось число, делящееся на $123456789^{123456789}$.

10. Докажите, что существует арифметическая прогрессия с разностью больше 100 такая, что в ней бесконечно много простых чисел.

11. Для любого натурального n докажите, что существует такое натуральное $k < n$, что в десятичной записи числа kn встречаются не все цифры.