

*Кружок в Хамовниках. 6 класс*  
**Серия 19. Снова графы. 7 марта.**

1. В стране из Столичного города выходит 501 дорога, а из города Дальний выходит одна дорога. Из всех остальных городов выходит 10 дорог. Докажите, что из Столичного города можно добраться до Дальнего.

2. Хулиган Леша по одной разрезает ниточки, составляющие сетку от комаров размера  $14 \times 60$  ячеек. Какое наибольшее число разрезов он может сделать так, чтобы сетка не распалась?

3. В дереве 25 вершин. Для каждой двух вершин посчитали длину пути между ними. После чего указанные величины сложили для всех пар. Могла ли полученная сумма быть равна 1225?

4. В школе каждый мальчик дружит с девятью мальчиками и пятью девочками, а каждая девочка дружит с десятью девочками и шестью мальчиками. Кого больше в школе: мальчиков или девочек?

5. Некоторые жители города  $N$  знакомы между собой. Назовём жителя необщительным, если у него не более трёх знакомых. Назовём жителя чудаком, если все его знакомые необщительные. Кого в городе больше: необщительных или чудаков?

Назовём раскраску вершин графа *правильной*, если вершины одного цвета не соединены ребром.

6. Докажите, что вершины дерева можно правильным образом покрасить в любое количество цветов, большее 1.

7. Докажите, что вершины графа можно правильным образом покрасить в два цвета тогда и только тогда, когда каждый его цикл имеет чётную длину.

Граф, вершины которого можно правильным образом покрасить в два цвета называется *двудольным*.

8. Степень каждой вершины графа не превосходит 9. Докажите, что его вершины можно правильным образом покрасить в 10 цветов.

9. В графе сумма степеней любых двух вершин не больше 19. Докажите что его вершины можно правильным образом покрасить в 10 цветов.

10. В стране 20 городов, любые два из которых соединены дорогами. Министерство транспорта решило каждый день закрывать по одной дороге. При этом можно закрыть только ту дорогу, для которой есть объездной маршрут ровно из трёх дорог. Может ли министерство транспорта добиться, чтобы осталось всего 20 дорог, образующих циклический путь по всем городам?