

Серия 18. Графы. Последний день февраля.

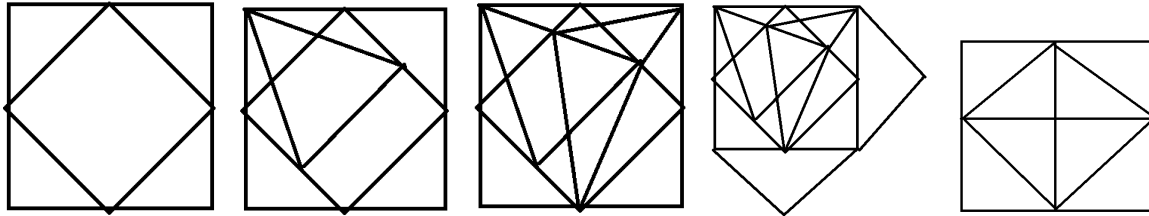
1. а) В трёх вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагонали на свободное место. Можно ли такими действиями добиться, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?

б) На шахматной доске 5×5 расставили максимальное число коней так, чтобы они не били друг друга. Докажите, что такая расстановка – единственная.

в) На столе лежат карточки с числами от 1 до 14. Петя и Вася по очереди берут по одной карточке со стола (начинает Петя). Цель Васи в том, чтобы когда осталось две карточки, их сумма была полным квадратом. Цель Пети ему помешать. Кто из них преуспеет? Какой граф полезно рассмотреть в это задаче?

г*) Сейф закрыт на кодовый замок. Замок откроется, если подряд ввести знаки, составляющие шифр. (При этом неважно, что вводилось до этого) Про шифр известно, что он состоит из шести цифр, каждая из которых равна 1 или 2. Сколько символов необходимо ввести, чтобы наверняка открыть замок?

2. Можно ли нарисовать следующие чертежи, не отрывая карандаш от бумаги?



Назовём путь *эйлеровым*, если он проходит через все рёбра ровно по одному разу. Аналогично определим и эйлеров цикл.

Степень вершины — количество рёбер графа из нее выходящих.

3. а) В каких графах не бывает эйлерова пути? А цикла? Для ответа на этот вопрос подумайте, в каких вершинах может начинаться и заканчиваться эйлеров путь.

б) Если граф можно представить, как объединение двух циклов, то в нём найдётся эйлеров цикл.

в) Докажите, что в графе, степени всех вершин которого чётны, найдётся эйлеров цикл.

г) Если в графе две вершины нечётной степени, то найдётся эйлеров путь.

4. а) А может ли в графе быть ровно одна вершина нечётной степени?

б) Как связано количество рёбер графа и степени его вершин?

в) У марсианина 3 руки. Могут ли 15 марсиан взяться за руки (каждый берётся за руку с кем-то другим, все руки заняты)?

г) Что можно сказать про вершины нечётной степени?

5. В стране из Санкт-Петербурга, столицы Российской империи, выходит 101 дорога, из города Дальнего, основанного в 1898 на арендованной у Китая территории, выходит одна дорога, а из всех остальных городов выходит 10 дорог. Докажите, что существует путь из столицы в Дальний.

Граф называется *деревом*, если он связан и в нём нет циклов.

Вершина дерева называется *висячей*, если её степень равна 1.

6. а) Граф дерево, iff между любыми двумя вершинами существует ровно один путь.

б) Докажите, что в дереве есть висячая вершина.

в) Докажите, что в дереве на n вершинах $n - 1$ ребро.

г) Докажите, что в связном графе на n вершинах не менее $n - 1$ ребра.

7. Докажите, что из любого графа можно удалить несколько рёбер так, чтобы оставшийся граф был деревом.

8. В марсианском метро между некоторыми станциями есть пути. Известно, что от каждой станции до каждой можно доехать. Всегда ли можно закрыть на ремонт одну из станций и все выходящие из неё пути так, чтобы по-прежнему можно было добраться от любой станции до любой другой?