

Серия 2⁴. Принцип крайнего. 14.02

Идеи. В задачах, где требуется установить существования некоторого объекта с хитрыми свойствами, зачастую таким объектом является крайний объект. Иногда рассмотрение особых крайних объектов помогает и в задачах на доказательство.

1. На шахматной доске расставлены ладьи. Докажите, что некоторая ладья бьёт не более двух.

2. а) По кругу выписано несколько натуральных чисел, каждое из которых не превосходит одного из соседних с ним. Докажите, что среди этих чисел точно есть хотя бы два равных.

б) По кругу выписано несколько чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних с ним. Докажите, что все эти числа равны.

3. У Миши всего 22 одноклассника. У каждого из этих 22 различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Миши? Привет всем, кстати!

4. На каждой из планет некоторой системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Докажите, что если число планет нечётно, то какую-то планету никто не наблюдает.

5. Доказать, что шахматную доску 4×4 клетки нельзя обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле по одному разу и последним ходом вернувшись на исходную клетку.

6. На столе лежат одинаковые монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более трёх других.

7. 200 солдат выстроены прямоугольником по 10 человек в каждом поперечном ряду и по 20 человек в каждом продольном ряду. В каждом продольном ряду выбран самый высокий солдат, а затем из отобранных 10 человек выбран самый низкий. С другой стороны, в каждом поперечном ряду выбран самый низкий солдат, а затем среди отобранных 20 выбран самый высокий. Кто из двоих окажется выше?

8. У каждого из 25 толстяков есть сестра. Каждая из этих сестёр вышла замуж за какого-то другого из этих толстяков. За год толстяк потолстел на вдвое большее число килограммов, чем похудела его жена и при этом на 8 килограммов больше, чем его жена. На какое число килограммов могла похудеть какая-то из сестёр толстяков.