Геометрический разнобой

11 класс

23.03.15

1. (ММО, 2015 (9 класс)) Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного треугольника ABC. Две равные окружности касаются сторон AB, BC и AC, BC соответственно; кроме этого, они касаются друг друга в точке K. Оказалось, что K лежит на прямой OI. Найдите $\angle BAC$.

2. (Иран, 1999) Пусть в треугольнике ABC $BC > AC > BA$. На луче BC выбрана точка D, на луче BA выбрана точка E такие, что $BD = BE = AC$. Описанная окружность треугольника BDE пересекает AC в точке P, прямая BP пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке Q. Докажите, что $AQ + QC = BP$.

3. (Франция, 1999) Пусть точки A', B', C' симметричны вершинам треугольника A, B, C относительно прямых BC, AC, AB соответственно. Докажите, что A', B', C' лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда расстояние между ортоцентром и центром описанной окружности треугольника ABC равно диаметру описанной окружности этого треугольника.

4. (ММО, 2015) Дан треугольник ABC. Проведены высота AH и медиана CM. Обозначим их точку пересечения через P. Высота, проведенная из вершины B треугольника, пересекается с перпендикуляром, опущенным из точки H на прямую CM, в точке Q. Докажите, что прямые CQ и BP перпендикулярны.

5. (IMO Selection tests, 1999) Пусть O – центр вневписанной окружности треугольника ABC напротив вершины A. M – середина отрезка AC, P – точка пересечение BC и OM, $\angle BAC = 2\angle ACB$. Докажите, что $AB = BP$.

6. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята точка P. В треугольники PAB, PBC, PCD, PDA вписаны окружности с центрами O_1, O_2, O_3, O_4 соответственно. Оказалось, что каждая из этих окружностей касается двух соседних. Докажите, что прямые O_1O_2, O_3O_4 и AC пересекаются в одной точке или параллельны.

7. (Беларусь, 1999) Окружность вписана в трапецию $ABCD$. Окружность пересекает диагонали AC и BD в точках K, L, M, N соответственно. Причем $AK \cdot LC = 16$, а $BM \cdot ND = \frac{9}{4}$. Найдите радиус окружности.