Последний листик

11 класс

16.04.2015

1. Дано натуральное n и числа ε_1, ε_2, $\ldots$, $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ такие, что $\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n\varepsilon_1 = 0$. Докажите, что n делится на 4.

2. Шар вписан в n-угольную пирамиду. Боковые грани пирамиды поворачиваются вокруг рёбер основания и кладутся в плоскость основания так, что они лежат по одну сторону от соответствующих рёбер вместе с основанием. Докажите, что вершины этих граней, отличные от вершин основания, лежат на одной окружности.

3. На бумажном клетчатом листе 9×9 выбрали k клеток, и в них сделали разрезы по диагоналям (по обеим диагоналям, получились k клеток с крестами). При каком максимальном k лист мог не распасться?

4. Дано натуральное число $m > \frac{n^4}{16}$. Докажите, что число m можно не более чем одним способом представить в виде произведения двух его делителей, которые отличаются не более чем на n.

5. В некотором графе степень каждой вершины не превосходит 1000. Докажите, что рёбра графа можно так покрасить в 10 цветов, что не найдется нечетного одноцветного цикла.

6. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а точка M — середина стороны BC. Прямая MI пересекает сторону AB в точке D, а прямая, проходящая через B перпендикулярно AI, пересекает отрезок CI в точке K. Докажите, что KD параллельно AC.

7. Докажите, что для любого натурального $m > 1$ и любого целого r, $0 \leqslant r < m$, существует натуральное n такое, что показатель степени, в которой 2 входит в разложение на простые множители числа $n!$, дает остаток r при делении на m.

8. Прямоугольник $m \times n$ склеен в тор. Докажите, что число способов его разрезать на прямоугольники чётной площади чётно (разрезания, отличающиеся друг от друга поворотом тора, считаются разными).

9. Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, причём на каждый крестик первого игрока второй отвечает 100 ноликами. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали квадрат (со сторонами, параллельными линиям клеток).

10. Внутри n-угольной призмы $A_1A_2\ldots A_nB_1B_2\ldots B_n$ взята точка O. На лучах OA_i, OB_i выбраны точки A_i', B_i' соответственно. Докажите, что не существует выпуклого многогранника, среди рёбер которого были бы все отрезки $A_1'B_2'$, $A_2'B_3'$, $\ldots$, $A_{n-1}'B_n'$, $A_n'B_1'$.