Конформные отображения сферы и пучки окружностей. Теоретическая часть листика.

11 класс

19.03.2015

1. Докажите, что инверсия пространства переводит окружность, не проходящую через центр инверсии, в окружность. Выведите отсюда теорему о стереографической проекции: образ окружности при стереографической проекции — окружность. (Стереографическая проекция — центральная проекция с плоскости на сферу; центр проекции лежит на сфере, касательная плоскость к нему к сфере параллельна плоскости, с которой проецируем)

2. Пополним плоскость одной бесконечно удалённой точкой, которая будет лежать на всех прямых. *Обобщённые окружности* — прямые или окружности. *Комплексным дробно-линейным отображением* назовём отображение, в некоторой комплексной системе координат заданное формулой $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, где числитель и знаменатель не пропорциональны. Докажите, что комплексные дробно-линейные преобразования образуют группу (т.е. обратимы и замкнуты относительно композиции) и сохраняют обобщённые окружности.

   Инверсия + симметрия лежит в этой группе, а инверсия — нет.

3. Рассмотрим группу преобразований плоскости следующего вида: сначала стереографически спроецируем нашу плоскость на какую-нибудь сферу, затем повернём сферу и спроецируем стереографически обратно. И так несколько раз. Докажите в этой задаче и в предыдущей речь идёт об одних и тех же преобразованиях (группа *конформных отображений* сферы). Докажите также, что эта группа сохраняет углы между обобщёнными окружностями.

4. Дана сфера с центром O и радиусом R. Для множества M точек пространства определим множество сопряжённых точек M^*: $Y \in M^* \Leftrightarrow \forall X \in M\ \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OY} = R^2$. Опишите все множества, для которых $M^{**} = M$. Определите полярную плоскость точки, полюс плоскости и полярную прямую прямой, научитесь строить их конструктивно. Доопределите их в проективном пространстве в случае, когда они проходят через O.

5. В пространстве дана сфера. Рассмотрим прямую в пространстве (может быть бесконечно удалённую), проведём всевозможные плоскости через неё. Они высекут какой-то множество окружностей на сфере. Это множество будем называть *пучком окружностей* **на сфере**. Если рассмотреть сечения сферы всеми плоскостями, проходящие через фиксированную точку пространства, получим *связку окружностей*. Если каждой окружности сопоставить полюс плоскости, через неё проходящей, то пучкам будут соответствовать прямые в пространстве, а связкам — плоскости. Докажите это.

   Пучком окружностей **на плоскости** назовём множество окружностей, имеющих общую радикальную ось (задаётся двумя неконцетрическими). Связка — множество окружностей, имеющих общий радикальный центр (задаётся тремя не из одного пучка). **Собственно, утверждение задачи: стереографическая проекция переводит пучки в пучки и связки в связки.** Какие ещё множества окружностей на плоскости стоит считать пучками и связками, чтобы утверждение было верным и для обратной стереографической проекции?

6. Докажите, что конформные отображения сферы сохраняют пучки и связки окружностей.

7. Свяжем с каждой окружностью или прямой её уравнение в комплексных координатах вида $Az\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0$, где $A, C \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{C}$, коэффициенты не все нули. Докажите, что три (четыре) обобщённые окружности на плоскости в одном пучке (связке) тогда и только тогда, когда их уравнения линейно зависимы над $\mathbb{R}$.

Конформные отображения сферы и пучки окружностей. Задачи.

11 класс

19.03.2015

1. Сфера вписана в четырёхугольную пирамиду $SABCD$, касается боковых граней SAB, SBC, SCD, SDA в точках K, L, M, N соответственно. На рёбрах SA, SB, SC, SD выбрали такие точки A', B', C', D' соответственно, что $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$. Докажите, что $N \in DA$.

2. Через вершину A куба $ABCDA'B'C'D'$ проведена плоскость, касающаяся вписанной в куб сферы и пересекающая отрезки $A'B$ и $A'D$ в точках P и Q. Докажите, что PQ касается вписанной в куб сферы.

3. К сфере проведены две скрещивающиеся касательные l_1 и l_2. На них выбираются случайные точки A_1 и A_2 соответственно таким образом, что прямая A_1A_2 касается сферы в точке X. Найдите ГМТ X.

4. В четырёхугольную пирамиду $SABCD$ вписана сфера. На рёбрах SA, SB, SC, SD отмечены точки A', B', C', D' соответственно. Докажите, что вторые касательные плоскости к сфере, проведённые через рёбра $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$, пересекаются в одной точке.

5. Касательную плоскость к точке A к описанной сфере тетраэдра $ABCD$ пересекли с плоскостями граней ABC, ACD, ADB. Докажите, что три полученные прямые при пересечении образуют шесть равных углов, если и только если выполнено соотношение: $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

6. Дана сфера и две точки вне неё. Докажите, что геометрическое место точек пересечения касательных к сфере, проходящих через эти точки, можно засунуть в объединение двух плоскостей.

7. В тетраэдр $SABC$ вписана сфера. На рёбрах SA, SB, SC отмечены пары точек A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 соответственно. Оказалось, что плоскости AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_2, AB_2C_2, BC_2A_2 касаются сферы. Докажите, что CA_2B_1 — тоже касается сферы.

8. Сфера касается всех ребёр тетраэдра $ABCD$, кроме, быть может, ребра BD. Оказалось, что точки касания сферы с рёбрами AB, BC, CD, DA в указанном порядке являются вершинами квадрата. Докажите, что сфера всё-таки касается ребра BD.