

Алгоритмы и преследования

11 класс

16.03.2015

1. На плоскости есть деталька и бомж с металлоискателем. Деталька лежит и не двигается, а бомж может сделать шаг (фиксированной длины) в любом направлении, после чего по показаниям металлоискателя понять, ближе он стал к детальке или нет. Если деталька находится на расстоянии не больше шага от бомжа, он её находит. Докажите, что бомж может найти детальку.
2. Бомж с другом играем в «шахматы для неполноценных». На доске 3×2015 он играет за ладью, а друг — за коня (обычные шахматные правила, фигуры умеют рубить друг друга). Докажите, что бомж может захватить коня. А что если друг играет за слона?
3. Несколько вагонов сцеплены по кругу. Бомж очнулся внутри одного из вагонов, его задача определить, сколько их всего. Бомж понимает, горит ли в вагоне свет, умеет включать и выключать свет и переходить в один из соседних вагонов. А ещё у него отличная память и он понимает, из какой двери пришёл в текущий вагон. Докажите, что поставленная задача бомжу по плечу.
4. Волк находится в центре квадрата, четыре пса — в его вершинах. Волк может передвигаться по всей плоскости, псы — только по сторонам квадрата. Максимальная скорость псов в $\sqrt{2}$ больше максимальной скорости волка. Волк может серьёзно пострадать только при встрече с двумя псами одновременно. Псы видят волка. Сможет ли волк выбраться из квадрата?
5. На бесконечной в обе стороны улице стоит отделение милиции, из которого сбежал бомж (опять в передрыгу попал). Максимальная скорость милиционера — 1, бомжа — 0.9 (пьян). Время побега и местоположение бомжа милиционеру не известны. Докажите, что он может поймать бомжа (милиционер поймал бомжа, если оказался с ним одновременно в одной и той же точке).
6. В условиях предыдущей задачи про максимальную скорость бомжа известно лишь, что она существует и меньше 1. Докажите, что милиционер всё равно сможет поймать бомжа.
7. Паутина представляет из себя куб $n \times n \times n$ (разбит на кубики $1 \times 1 \times 1$). В трёх вершинах кубической сетки сидят по пауку, и ещё в одной сидит жук. Жук за ход перемещается по одному из рёбер в соседнюю вершину (или стоит на месте). Пауки за ход перемещаются также (за ход могут переместиться все пауки). Жук и пауки ходят по очереди. Жук считается пойманным, если в некоторый момент времени он оказался в вершине вместе с пауком. Пауки видят жука. Докажите, что пауки могут поймать жука. А если паука всего два?
8. Бомж с металлоискателем из первой задачи знает, что деталька находится на расстоянии ровно $n > 2015$ шагов, и она действительно находится на таком расстоянии.
 - а) Докажите, что за $n + 10 \log_2 n$ он может найти детальку.
 - б) Докажите, что за $n + 0.1 \log_2 n$ он не сможет найти детальку.
9. На бесконечной клетчатой плоскости три милиционера преследуют бомжа (снова в передрыгу попал). Все они имеют одинаковую максимальную скорость и могут **перемещаться и видеть только по линиям сетки**. Бомж попался, если один из милиционеров его увидел (т.е. оказался с ним на одной целой вертикали или горизонтали). Местоположение бомжа милиции не известно. Докажите, что бомжа можно поймать.