

Применение линейной алгебры в задачах

11 класс

12.03.2015

1. Дана таблица, в которой $n + 1$ строка и n столбцов. В некоторых клетках таблицы сидят зайчики. Докажите, что можно выбрать непустой набор строк так, чтобы в каждом столбце в выбранных строках находилось чётное число зайчиков.
2. Имеется $n + 1$ непустых подмножеств n -элементного множества. Докажите, что ненулевую часть из них можно покрасить в красный или синий цвет, так чтобы объединение красных подмножеств совпадало с объединением синих.
3. В городе k супружеских пар и n клубов. Известно, что для любой пары из мужчины и женщины количество клубов, в которых они оба бывали, нечётно тогда и только тогда, когда они — муж и жена. Докажите, что $n \geq k$.
4. Учебная группа с переменным успехом посещала занятия. К концу семестра выяснилось, что каждый из студентов пробил ровно n пар, а любые два студента пробили одновременно ровно $k < n$ пар. Докажите, что пар в семестре было не меньше числа студентов в группе.
5. В КИМах ЕГО (Единой Государственной Олимпиады) n тестовых вопросов, ЕГО пишут k участников. Известно, что проверочная комиссия может так приписать положительные веса тестовым вопросам, чтобы участники по первичным балам расположились в любом наперёд проплаченном порядке. Докажите, что $n \geq k$.
6. К каждой вершине графа прикручена лампочка, изначально все лампочки выключены. За один раз можно выбрать любую вершину графа и поменять все состояния лампочек в ней самой и во всех её соседях на противоположные. *Включить граф* \Leftrightarrow включить все лампочки.
 - а) Иван умеет включать граф за x операций, а Василиса — за y . Докажите, что $|x - y|$ чётно.
 - б) Докажите, что граф вообще можно включить.
7. Найдите все наборы M 1986-элементных подмножеств 2009-элементного множества \mathcal{R} , такие что любое 23-элементное подмножество множества \mathcal{R} целиком содержалось в одинаковом количестве подмножества из M .