Серия 4

11 класс

02.03.15

1. В пространстве расположено несколько окружностей, причём любые две из них имеют пару общих точек. Докажите, что либо все эти окружности имеют две общие точки, либо все они принадлежат одной сфере (или одной плоскости).
2. Клетки шахматной доски $n \times n$, где n — чётное число, большее 2, раскрашены $\frac{n^2}{2}$ красками так, что каждой краской окрашены ровно две клетки. Докажите, что на доске можно расставить n ладей так, чтобы они стояли на клетках разного цвета и не били друг друга.
3. На прямоугольном столе разложено несколько одинаковых квадратных листов бумаги так, что их стороны параллельны краям стола (листы могут перекрываться). Докажите, что можно воткнуть несколько булавок таким образом, что каждый лист будет прикреплен к столу ровно одной булавкой.
4. Даны такие комплексные числа $z_1, z_2, \dots, z_n$, что

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| = 1.$$

Докажите, что существует такое подмножество S множества $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, что

$$\left| \sum_{z \in S} z \right| \geq \frac{1}{6}.$$

5. Точку X , находящуюся внутри треугольника ABC , отразили относительно стороны BC и получили точку Y . Лучи AX и AU пересекают сторону BC в точках X' и Y' соответственно (прямые AX и BC не перпендикулярны). Оказалось, что $\angle X'XC = \angle Y'XB$. Докажите, что $\angle X'AC = \angle Y'AB$.
6. В 100 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 34 ящиков, что в них окажется не менее трети всех яблок и не менее трети всех апельсинов.
7. Пусть a, b, c — такие положительные числа, что $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ac}{a^5 + c^5 + ac} \leq 1.$$

8. В математической олимпиаде приняли участие 21 мальчик и 21 девочка. Известно, что:
 - каждый из них решил не более шести задач;
 - для каждого мальчика и каждой девочки найдется по крайней мере одна задача, которая была решена ими обоими.Докажите, что найдется задача, которую решили хотя бы 3 мальчика и 3 девочки.