

Линейная алгебра. Определения.

11 класс

05.03.2015

$\mathbb{K}$ — поле. Для практических нужд нам потребуются лишь поля $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$ (p — простое).

Тем, кто сталкивается с этими объектами впервые, настоятельно рекомендуется считать, что $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Если внимательно следить за доказательствами, легко убедиться, что от вещественных чисел нам потребуются только свойства замкнутости относительно алгебраических операций суммы, произведения, взятия обратного по сложению (« $-x$ ») и по умножению (« x^{-1} »).

Линейным (векторным) пространством над полем $\mathbb{K}$ назовём множество V , на котором заданы две операции: $+: V \times V \rightarrow V$ и $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$, удовлетворяющие аксиомам:

1. $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$ выполнено $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$.
2. $\exists 0 \in V$, т.ч. $\forall v \in V$ верно $v = 0 + v = v + 0$.
3. $\forall v \in V \exists w \in V$, т.ч. $v + w = w + v = 0$.
4. $\forall v_1, v_2 \in V$ выполнено $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.
5. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v_1, v_2 \in V$ верно $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$.
6. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \forall v \in V$ верно $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$.
7. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \forall v \in V$ верно $(\lambda_1 \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$.
8. $\forall v \in V$ выполнено $1 \cdot v = v$.

Комментарии к написанному: аксиомы 1–4 говорят нам, что V является коммутативной группой относительно операции сложения. Из аксиомы 2 легко вывести, что $0 \in V$ единственен (в противном случае $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$). Из аксиомы 3 с помощью аксиомы 1 выводится единственность обратного элемента по сложению: если $\exists w_1, w_2$, то $w_1 = w_1 + 0 = w_1 + (v + w_2) = (w_1 + v) + w_2 = 0 + w_2 = w_2$. Далее обратный по сложению элемент будет обозначаться $-v$. В аксиоме 7 элементы поля λ_1, λ_2 в левой части умножаются в смысле умножения в поле. В аксиоме 8 символом «1» обозначена единица поля.

Символом «0» в зависимости от контекста в дальнейшем могут обозначаться $0 \in V$ и $0 \in \mathbb{K}$.

Основной (и, в некотором смысле, единственный) пример векторного пространства — $\mathbb{K}^n$, множество наборов из n элементов $\mathbb{K}$.

Линейной комбинацией векторов $v_1, \dots, v_k$ назовём выражение вида $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$.

Линейной оболочкой некоторого множества векторов $S \subseteq V$ назовём множество всевозможных линейных комбинаций всевозможных конечных наборов его элементов.

Набор векторов $v_1, \dots, v_k$ называется линейно зависимым, если существует нетривиальная нулевая линейная комбинация этих векторов: т.е. существует набор чисел (элементов поля) $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, не все из которых нули, т.ч. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$.

Подмножество $S \subseteq V$ называется подпространством, если оно является линейным пространством относительно наследуемых из V операций. На самом деле для того чтобы S было подпространством, достаточно проверить, что результаты операций « $v_1 + v_2$ », « $\lambda \cdot v$ », « $-v$ » лежат в S , если все входные векторы лежали в S .

Два линейных пространства V и W изоморфны, если существует биекция между ними, сохраняющая операции. Такая биекция называется изоморфизмом.

Пусть $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$. Зафиксируем навсегда некоторый базис $e_1, \dots, e_n \in V$ (что такое базис — смотрите листик). Каждому вектору $v \in V$ сопоставим набор $v^1, \dots, v^n \in \mathbb{K}$ его координат в этом базисе: $v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n$ (определяется единственным образом). Определим скалярное произведение векторов v, w : $(v, w) := v^1 w^1 + \dots + v^n w^n$. Квадратом длины вектора v назовём (v, v) . В случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ выполнена «эквиваленция» $v = 0 \Leftrightarrow (v, v) = 0$.

Линейная алгебра. Упражнения.

11 класс

05.03.2015

1. Докажите, что набор векторов $v_1, \dots, v_k$ является линейно зависимым тогда и только тогда, когда один векторов этого набора выражается как линейная комбинация остальных.
2. Набор векторов $v_1, \dots, v_k$ линейно независим. Пусть также известно, что если в этот набор добавить любой вектор v , условие линейной независимости нарушится. Докажите, что любой $v \in V$ выражается как линейная комбинация $v_1, \dots, v_k$, причём единственным образом.

Такой набор векторов называется *базисом* пространства.

3. Дана однородная система линейных уравнений (коэффициенты и неизвестные — элементы $\mathbb{K}$):

[illegible]

Докажите, что если $m > k$, то у неё существует нетривиальное решение (не все $x_i = 0$).

4. Даны два набора векторов $v_1, \dots, v_k$ и $w_1, \dots, w_m$, причём все w_j выражаются как линейные комбинации набора $\{v_i\}$. Используя предыдущую задачу, докажите, что если $m > k$, то набор $w_1, \dots, w_m$ линейно зависим.

5. Рассмотрим следующий процесс формирования набора векторов: изначально был пустой набор, на каждом следующем шаге будем добавлять к набору какой-нибудь вектор, не лежащей в линейной оболочке уже выбранных. Если такого вектора нет, останавливаем процесс. Пусть $v_1, \dots, v_k, \dots$; $w_1, \dots, w_m, \dots$ — две последовательности векторов, получившиеся в результате двух таких процессов. Докажите, что если одна из них имеет конечное число элементов, то вторая тоже имеет конечное число элементов, причём столько же, сколько первая.

Таким образом, у все базисов (если они существуют) одинаковое число элементов. Это число называется *размерностью* пространства ($\dim V$). Пространства бывают бесконечномерными.

6. Докажите, что конечномерные пространства V и W изоморфны тогда и только тогда, когда у них одинаковая размерность.
7. Докажите, что размерность подпространства не превосходит размерность пространства.
8. Докажите, что пересечение подпространств — подпространство.
9. Докажите, что линейную оболочку подмножества $S \subseteq V$ можно определить как пересечение всех подпространств, содержащих S .
10. *Коразмерностью* подпространства $V_1 \subseteq V$ назовём величину $\dim V - \dim V_1$. Докажите, что коразмерность $V_1 \cap V_2$ не превосходит суммы коразмерностей подпространств V_1, V_2 .
11. *Суммой* подпространств V_1, V_2 назовём линейную оболочку их объединения. Докажите, что $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$.
12. Ненулевые векторы $v_1, \dots, v_k$ попарно ортогональны, т.е. $(v_i, v_j) = 0$ при $i \neq j$. Докажите, что эти векторы линейно независимы при $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$. Покажите, что утверждение неверно, если $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$. Как можно усилить условие, чтобы утверждение стало верным?