

Теория вероятностей

11 класс

26.02.2015

- 1. Докажите, что $\sum_{k=0}^n k \cdot C_n^k = \frac{n}{2} \cdot 2^n$.
0. Игра в "супершахматы" ведётся на доске размером 100×100 , в ней участвует 20 различных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого места бьет не более 20 полей (но больше о правилах ничего не сказано, например, если фигуру А передвинуть, то о том, как изменится множество битых полей мы ничего не знаем). Докажите, что можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.
1. Имеется n -элементное множество и семейство из менее чем 2^{k-1} его k -элементных подмножеств. Докажите, что элементы исходного множества можно покрасить в два цвета таким образом, чтобы никакое его k -элементное подмножество из рассматриваемого семейства не было одноцветным.
2. Есть 100 ящиков с гвоздями. Среднее количество гвоздей в ящике — 10, а средний квадрат количества гвоздей в ящике меньше 200. Докажите, что больше половины ящиков не пусты.
3. На окружности отмечены $2n$ точек так, что никакие три хорды с концами в этих точках не пересекаются в одной точке, лежащей внутри окружности. Разобьем отмеченные точки на n пар, и в каждой паре соединим точки отрезком. Число точек пересечения проведенных n отрезков назовем *характеристикой* разбиения. Найдите среднее арифметическое характеристик по всем разбиениям.
4. На плоскости даны 10 точек. Докажите, что их можно покрыть непересекающимися кругами радиуса 1.
5. В 100-местный самолёт садятся пассажиры. Первой заходит бабушка и садится на какое угодно место (равновероятно), только не на своё. Каждый следующий заходящий пассажир заходит и садится на своё место, если оно свободно, и на любое свободное место (равновероятно, не зависимо от всей предыстории). С какой вероятностью последний входящий пассажир займёт своё место?
6. В нулевой момент времени появилась частица. Все частицы существуют ровно одну секунду, в конце своей жизни порождая (равновероятно, независимо друг от друга) 0, 1, 2 или 3 новые частицы. С какой вероятностью все частицы когда-нибудь умрут?