Серия 2

11 класс

23.02.2015

1. p — простое. Найдите наибольшую степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$.

2. За круглым столом сидят 25 девочек и 25 мальчиков. Докажите, что найдётся человек, оба соседа которого — девочки.

3. Окружность с центром O касается двух расположенных в ней окружностей в точках P и Q. Эти две окружности пересекаются в точках M и N, где N ближе к PQ. Докажите, что OM и MN перпендикулярны, если и только если точки P, Q, N лежат на одной прямой.

4. (*письменная*) Какое наибольшее число чёрных и белых пешек можно поставить на доску 9×9 таким образом, чтобы они не били друг друга (в том числе пешки одного цвета)? Белые пешки умеют бить только в вправо-вверх и влево-вверх, чёрные — вправо-вниз и влево-вниз.

5. Рассмотрим множество всевозможных последовательностей $x_0, \ldots, x_n, \ldots$, удовлетворяющих условиям: $1 = x_0 \geqslant x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots$ и все $x_i > 0$. Докажите, что на этом множестве достигается минимум величины $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x_k^2}{x_{k+1}}$. Найдите значение этого минимума.

   Да, иногда он расходится $(= +\infty)$, *но мы же ищем минимум.*

6. Докажите, что существует константа $c > 0$ со следующим свойством: если a, b, n — натуральные числа, такие что НОД$(a + i, b + j) > 1$ для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, тогда $\min\{a, b\} > (n)^{cn}$.

7. В треугольнике ABC проведена медиана AA_1, пересекающая вписанную в треугольник окружность ω в точках M и N. P и Q - такие точки на ω, что $PM \parallel QN \parallel BC$. Прямые AM, AN пересекают BC в точках X и Y. Докажите, что A_1 — середина XY.

8. (*письменная*) Есть набор из 2001 карточки с написанными на них натуральными числами от 1 до 2001. В начале игры у первого игрока все карточки с нечётными числами, у второго — с чётными. Игроки ходят поочерёдно, начинает первый. За раунд игрок, делающий ход, выкладывает одну из своих карточек на стол; его оппонент после этого выкладывает одну из своих карточек. Тот, у кого число больше, получает очко. Игра заканчивается после 1000 раундов. Какое максимальное количество очков может набрать каждый из игроков, вне зависимости от игры соперника?