

Функции и их свойства

11 класс

22.01.15

1. Существует ли функция $f(x)$, определенная при всех $x \in \mathbb{R}$ и для всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяющая неравенству

$$|f(x+y) + \sin x + \sin y| < 2?$$

2. Существует ли ограниченная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f(1) > 0$ и $f(x)$ удовлетворяет при всех $x, y \in \mathbb{R}$ неравенству

$$f^2(x+y) \geq f^2(x) + 2f(xy) + f^2(y)?$$

3. Какое наибольшее конечное число корней может иметь уравнение

$$|x - a_1| + \dots + |x - a_{50}| = |x - b_1| + \dots + |x - b_{50}|,$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{50}, b_1, b_2, \dots, b_{50}$ – различные числа?

4. Семь треугольных пирамид стоят на столе. Для любых трех из них существует горизонтальная плоскость, которая пересекает их по треугольникам равной площади. Доказать, что существует плоскость, пересекающая все семь пирамид по треугольникам равной площади.
5. Решите уравнение $\cos \cos \cos \cos x = \sin \sin \sin \sin x$.
6. Докажите, что $x \cos x \leq \frac{\pi^2}{16}$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
7. Докажите, что любую функцию, определенную на всей оси, можно представить в виде суммы двух функций, график каждой из которых имеет ось симметрии.
8. Найдите все функции $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, такие что для любых положительных вещественных x и y верно $f(x + f(y)) = y \cdot f(xy + 1)$.