

Комбинаторика

11 класс

15.01.15

1. В ряду из 2009 гирек вес каждой гирьки составляет целое число граммов и не превышает 1 кг. Веса любых двух соседних гирек отличаются ровно на 1 г, а общий вес всех гирь в граммах является чётным числом. Докажите, что гирьки можно разделить на две кучки, суммы весов в которых равны.
2. На плоскости даны $n > 1$ точек. Двое по очереди соединяют ещё не соединённую пару точек вектором одного из двух возможных направлений. Если после очередного хода какого-то игрока сумма всех нарисованных векторов нулевая, то выигрывает второй; если же очередной ход невозможен, а нулевой суммы не было, то выигрывает первый. Кто выигрывает при правильной игре?
3. Клетки квадрата 50×50 раскрашены в четыре цвета. Докажите, что существует клетка, с четырёх сторон от которой (т.е. сверху, снизу, слева и справа) имеются клетки одного с ней цвета (не обязательно соседние с этой клеткой).
4. На карусели с n сиденьями мальчик катался n сеансов подряд. После каждого сеанса он вставал и, двигаясь по часовой стрелке, пересаживался на другое сиденье. Число сидений карусели, мимо которых мальчик проходит при пересаживании, включая и то, на которое он садится, назовем длиной перехода. При каких n за n сеансов мальчик мог побывать на каждом сиденье, если длины всех $n - 1$ переходов различны и меньше n ?
5. В таблице 10×10 расставлены числа от 1 до 100: в первой строчке – от 1 до 10 слева направо, во второй – от 11 до 20 слева направо и т.д. Весёлый маляр собирается разрезать таблицу на прямоугольники 1×2 , посчитать произведение чисел в каждом прямоугольнике и сложить полученные 50 чисел. Он стремится получить как можно меньшую сумму. Как ему следует разрезать квадрат?
6. В правильном $(6n + 1)$ -угольнике k вершин покрашено в красный цвет, а остальные – в синий. Докажите, что количество равнобедренных треугольников с одноцветными вершинами не зависит от способа раскраски.
7. На плоскости дано конечное число полос, суммарная ширина которых равна 100, и круг радиуса 1. Докажите, что каждую из полос можно параллельно перенести так, чтобы все они покрывали круг. (Полоса - часть плоскости, заключенная между двумя параллельными прямыми.)