10 класс	Приводимые многочлены	14 мая 2015

Определение. Многочлен называется *приводимым* над $\mathbb{K}$, если он представляется в виде произведения двух непостоянных многочленов с коэффициентами из $\mathbb{K}$. В противном случае многочлен называется *неприводимым* над $\mathbb{K}$.

К примеру, из основной теоремы алгебры следует, что любой многочлен с действительными коэффициентами выше 1-й степени приводим над $\mathbb{C}$, а любой многочлен выше 2-й степени приводим над $\mathbb{R}$.

1. Лемма Гаусса. Многочлен с целыми коэффициентами приводим над $\mathbb{Q}$. Тогда он приводим и над $\mathbb{Z}$.

2. Критерий Эйзенштейна. Пусть все коэффициенты многочлена с целыми коэффициентами, кроме старшего, делятся на простое число p, и притом свободный член не делится на p^2. Тогда этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$.

3. Докажите, что многочлен $x^{2016} + x^{2015} + \ldots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

4. Пусть a_i – различные целые числа. Когда многочлен $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$ приводим над $\mathbb{Z}$?

5. Пусть a_i – различные целые числа. Когда многочлен $((x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n))^2 + 1$ приводим над $\mathbb{Z}$?

6. Пусть a_i – различные целые числа. Когда многочлен $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) + 1$ приводим над $\mathbb{Z}$?

7. При каких натуральных n многочлен $x^n + 1$ приводим над $\mathbb{Z}$?

8. Пусть n – натуральное число. Существует ли многочлен степени n с целыми коэффициентами, обладающий следующим свойством: любой многочлен, у которого все соответственные коэффициенты отличаются не более чем на 2015 от данного, неприводим над $\mathbb{Z}$?

9. При каких натуральных n многочлен $x^n + 64$ неприводим над $\mathbb{Z}$?

10 класс	Приводимые многочлены	14 мая 2015

Определение. Многочлен называется *приводимым* над $\mathbb{K}$, если он представляется в виде произведения двух непостоянных многочленов с коэффициентами из $\mathbb{K}$. В противном случае многочлен называется *неприводимым* над $\mathbb{K}$.

К примеру, из основной теоремы алгебры следует, что любой многочлен с действительными коэффициентами выше 1-й степени приводим над $\mathbb{C}$, а любой многочлен выше 2-й степени приводим над $\mathbb{R}$.

1. Лемма Гаусса. Многочлен с целыми коэффициентами приводим над $\mathbb{Q}$. Тогда он приводим и над $\mathbb{Z}$.

2. Критерий Эйзенштейна. Пусть все коэффициенты многочлена с целыми коэффициентами, кроме старшего, делятся на простое число p, и притом свободный член не делится на p^2. Тогда этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$.

3. Докажите, что многочлен $x^{2016} + x^{2015} + \ldots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

4. Пусть a_i – различные целые числа. Когда многочлен $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$ приводим над $\mathbb{Z}$?

5. Пусть a_i – различные целые числа. Когда многочлен $((x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n))^2 + 1$ приводим над $\mathbb{Z}$?

6. Пусть a_i – различные целые числа. Когда многочлен $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) + 1$ приводим над $\mathbb{Z}$?

7. При каких натуральных n многочлен $x^n + 1$ приводим над $\mathbb{Z}$?

8. Пусть n – натуральное число. Существует ли многочлен степени n с целыми коэффициентами, обладающий следующим свойством: любой многочлен, у которого все соответственные коэффициенты отличаются не более чем на 2015 от данного, неприводим над $\mathbb{Z}$?

9. При каких натуральных n многочлен $x^n + 64$ неприводим над $\mathbb{Z}$?