10 класс — **Разнобой** — 13 апреля 2015

1. 2015 джентльменов пришли в гости в шляпах. Уходили они по одному, и каждый надевал любую шляпу, которая на него налезала. Если такой шляпы не было, то джентльмен уходил без шляпы. Какое наибольшее число джентльменов могло уйти без шляп?

2. Существуют ли четыре таких квадратных трёхчлена, что, записав их в произвольном порядке, мы сможем найти число, подставив которое в эти трёхчлены, получатся четыре значения, идущие в строго возрастающем порядке?

3. Дан граф с 2015 вершинами без рёбер. Двое по очереди проводят не проведённое ранее ребро. Проигрывает тот, после чьего хода граф станет связным. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке O. Точки A и B на окружности ω_1 и точки C и D на окружности ω_2 таковы, что AC и BD – общие внешние касательные к окружностям. Прямая AO пересекает отрезок CD в точке M, а прямая CO пересекает вторично окружность ω_1 в точке N. Докажите, что точки B, M и N лежат на одной прямой.

5. Сколько раз функция $f(x) = \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{x}{n}$ меняет знак на отрезке $[0; \frac{\pi n}{2}]$?

6. *Диаметром* множества точек на плоскости называется отрезок наибольшей длины с концами среди точек данного множества. Докажите, что у множества из n точек не более n диаметров.

7. Фокусник с помощником собираются показать следующий фокус. Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры чёрным кружком. Затем входит фокусник. Его задача – отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

8. Докажите, что число $3^{4^5} + 4^{5^6}$ представимо в виде произведения двух натуральных чисел, в десятичной записи каждого из которых не менее тысячи знаков.

10 класс — **Разнобой** — 13 апреля 2015

1. 2015 джентльменов пришли в гости в шляпах. Уходили они по одному, и каждый надевал любую шляпу, которая на него налезала. Если такой шляпы не было, то джентльмен уходил без шляпы. Какое наибольшее число джентльменов могло уйти без шляп?

2. Существуют ли четыре таких квадратных трёхчлена, что, записав их в произвольном порядке, мы сможем найти число, подставив которое в эти трёхчлены, получатся четыре значения, идущие в строго возрастающем порядке?

3. Дан граф с 2015 вершинами без рёбер. Двое по очереди проводят не проведённое ранее ребро. Проигрывает тот, после чьего хода граф станет связным. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке O. Точки A и B на окружности ω_1 и точки C и D на окружности ω_2 таковы, что AC и BD – общие внешние касательные к окружностям. Прямая AO пересекает отрезок CD в точке M, а прямая CO пересекает вторично окружность ω_1 в точке N. Докажите, что точки B, M и N лежат на одной прямой.

5. Сколько раз функция $f(x) = \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{x}{n}$ меняет знак на отрезке $[0; \frac{\pi n}{2}]$?

6. *Диаметром* множества точек на плоскости называется отрезок наибольшей длины с концами среди точек данного множества. Докажите, что у множества из n точек не более n диаметров.

7. Фокусник с помощником собираются показать следующий фокус. Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры чёрным кружком. Затем входит фокусник. Его задача – отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

8. Докажите, что число $3^{4^5} + 4^{5^6}$ представимо в виде произведения двух натуральных чисел, в десятичной записи каждого из которых не менее тысячи знаков.