10 класс | Теория чисел | 23 марта 2015

1. Про натуральные числа a, b, c известно, что $a^3 \vdots b$, $b^3 \vdots c$ и $c^3 \vdots a$. Докажите, что $(a+b+c)^{13} \vdots abc$.

2. Число называется *свободным от квадратов*, если оно не делится на квадрат натурального числа, большего 1. Существуют ли 2015 последовательных натуральных чисел, не свободных от квадратов?

3. p – простое число, $a_1, \ldots, a_p$ – конечная арифметическая прогрессия с разностью, не кратной p. Докажите, что в ней можно найти элемент a_k такой, что число $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p$ делится на p^2.

4. Натуральные числа x, y, z и n таковы, что $x^n + y^n = z^n$. Докажите, что $z > n$.

5. Для действительных чисел m и n определим следующую операцию: $m * n = \dfrac{m+n}{mn+4}$. Найдите значение выражения $(\ldots((2015 * 2014) * 2013)\ldots) * 1$.

6. Натуральное n таково, что число $k = 2 + 2\sqrt{28n^2+1}$ – целое. Докажите, что k – точный квадрат.

7. Дано следующее число: ноль, десятичная запятая, а далее без пробелов подряд все натуральные степени числа 257 (в каком-то неизвестном порядке). Докажите, что это число иррационально.

8. Найдите все пары натуральных a и b таких, что $a^2 + b \vdots b^2 + a$, причём $b^2 + a = p^\alpha$, где $p \in \mathbb{P}$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

9. Пусть p — простое число. Про целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_p$ известно, что число $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_p^n$ делится на p при любом натуральном n. Докажите, что $x_1 - x_2$ делится на p.

10. Докажите, что если при натуральных a и b число $\dfrac{a^2+b^2}{ab-1}$ — целое, то оно равно 5.

10 класс | Теория чисел | 23 марта 2015

1. Про натуральные числа a, b, c известно, что $a^3 \vdots b$, $b^3 \vdots c$ и $c^3 \vdots a$. Докажите, что $(a+b+c)^{13} \vdots abc$.

2. Число называется *свободным от квадратов*, если оно не делится на квадрат натурального числа, большего 1. Существуют ли 2015 последовательных натуральных чисел, не свободных от квадратов?

3. p – простое число, $a_1, \ldots, a_p$ – конечная арифметическая прогрессия с разностью, не кратной p. Докажите, что в ней можно найти элемент a_k такой, что число $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p$ делится на p^2.

4. Натуральные числа x, y, z и n таковы, что $x^n + y^n = z^n$. Докажите, что $z > n$.

5. Для действительных чисел m и n определим следующую операцию: $m * n = \dfrac{m+n}{mn+4}$. Найдите значение выражения $(\ldots((2015 * 2014) * 2013)\ldots) * 1$.

6. Натуральное n таково, что число $k = 2 + 2\sqrt{28n^2+1}$ – целое. Докажите, что k – точный квадрат.

7. Дано следующее число: ноль, десятичная запятая, а далее без пробелов подряд все натуральные степени числа 257 (в каком-то неизвестном порядке). Докажите, что это число иррационально.

8. Найдите все пары натуральных a и b таких, что $a^2 + b \vdots b^2 + a$, причём $b^2 + a = p^\alpha$, где $p \in \mathbb{P}$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

9. Пусть p — простое число. Про целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_p$ известно, что число $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_p^n$ делится на p при любом натуральном n. Докажите, что $x_1 - x_2$ делится на p.

10. Докажите, что если при натуральных a и b число $\dfrac{a^2+b^2}{ab-1}$ — целое, то оно равно 5.