10 класс | Графы | 19 марта 2015

1. В 11"Ж" классе учится 25 ребят. Известно, что среди любых четверых из них найдется по крайней мере один, который дружит с тремя остальными. Докажите, что найдется такой школьник, который дружит со всеми остальными одноклассниками.

2. В каждой из трех школ учится по 100 человек. Любой ученик имеет в сумме 101 знакомого из двух других школ. Докажите, что можно выбрать по одному ученику из каждой школы так, чтобы выбранные ученики были знакомы между собой.

3. В летний лагерь приехало 300 школьников. Оказалось, что количество троек попарно знакомых школьников больше, чем количество пар знакомых школьников. Докажите, что найдется школьник, знакомый хотя бы с пятью другими школьниками.

4. В стране $2n$ городов, причём от каждого из них выходит не менее n дорог (каждая дорога соединяет два города, между каждыми двумя городами – не более одной дороги). Докажите, что если закрыть любые $n-1$ дорог, то из любого города можно будет по дорогам добраться до любого другого.

5. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

6. В городе Полуторастороннем двустороннее движение. В течение двух лет в городе проходил ремонт всех дорог. Вследствие этого в первый год на некоторых дорогах было введено одностороннее движение. На следующий год на этих дорогах было восстановлено двустороннее движение, а на остальных дорогах введено одностороннее движение. Известно, что в любой момент ремонта можно было проехать из любой точки города в любую другую. Докажите, что в Полуторастороннем можно ввести одностороннее движение так, что из любой точки города удастся проехать в любую другую точку.

7. В полном 2015-вершинном графе ребра покрашены в несколько цветов, причем в любом треугольнике есть хотя бы два ребра одного цвета. Какое наибольшее количество цветов может быть в такой раскраске?

8. В стране есть несколько городов, соединенных дорогами. Каждая дорога соединяет только два города, и на ней введено одностороннее движение; при этом каждая пара городов соединена не более чем одной дорогой. Выехав из любого города, в него нельзя вернуться. Известно, что из города А в город Б можно проехать ровно 2015 способами. Какое наименьшее число городов может быть в стране?

9. В вершинах графа расположены лампочки, в начале все они выключены. За одно действие разрешается переключить состояние любой лампочки и всех, соединённых с ней ребром. Из исходного состояния Антон сумел добиться того, что все лампочки включены, за a действий, а Толя — за t действий. Докажите, что число $a-t$ — чётно.

Графы

1. В 11"Ж" классе учится 25 ребят. Известно, что среди любых четверых из них найдется по крайней мере один, который дружит с тремя остальными. Докажите, что найдется такой школьник, который дружит со всеми остальными одноклассниками.

2. В каждой из трех школ учится по 100 человек. Любой ученик имеет в сумме 101 знакомого из двух других школ. Докажите, что можно выбрать по одному ученику из каждой школы так, чтобы выбранные ученики были знакомы между собой.

3. В летний лагерь приехало 300 школьников. Оказалось, что количество троек попарно знакомых школьников больше, чем количество пар знакомых школьников. Докажите, что найдется школьник, знакомый хотя бы с пятью другими школьниками.

4. В стране $2n$ городов, причём от каждого из них выходит не менее n дорог (каждая дорога соединяет два города, между каждыми двумя городами – не более одной дороги). Докажите, что если закрыть любые $n-1$ дорог, то из любого города можно будет по дорогам добраться до любого другого.

5. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

6. В городе Полуторастороннем двустороннее движение. В течение двух лет в городе проходил ремонт всех дорог. Вследствие этого в первый год на некоторых дорогах было введено одностороннее движение. На следующий год на этих дорогах было восстановлено двустороннее движение, а на остальных дорогах введено одностороннее движение. Известно, что в любой момент ремонта можно было проехать из любой точки города в любую другую. Докажите, что в Полуторастороннем можно ввести одностороннее движение так, что из любой точки города удастся проехать в любую другую точку.

7. В полном 2015-вершинном графе ребра покрашены в несколько цветов, причем в любом треугольнике есть хотя бы два ребра одного цвета. Какое наибольшее количество цветов может быть в такой раскраске?

8. В стране есть несколько городов, соединенных дорогами. Каждая дорога соединяет только два города, и на ней введено одностороннее движение; при этом каждая пара городов соединена не более чем одной дорогой. Выехав из любого города, в него нельзя вернуться. Известно, что из города А в город Б можно проехать ровно 2015 способами. Какое наименьшее число городов может быть в стране?

9. В вершинах графа расположены лампочки, в начале все они выключены. За одно действие разрешается переключить состояние любой лампочки и всех, соединённых с ней ребром. Из исходного состояния Антон сумел добиться того, что все лампочки включены, за a действий, а Толя — за t действий. Докажите, что число $a-t$ — чётно.