

1. Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что прямая DE перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков AE и BC .
2. В остроугольном треугольнике ABC , в котором $\angle A = 45^\circ$, проведены высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 . Биссектриса угла BAA_1 пересекает прямую B_1A_1 в точке D , а биссектриса угла CAA_1 пересекает прямую C_1A_1 в точке E . Найдите угол между прямыми BD и CE .
3. Точки O и I – центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного треугольника ABC . Две равные окружности касаются сторон AB , BC и AC , BC соответственно; кроме этого, они касаются друг друга в точке K . Оказалось, что K лежит на прямой OI . Найдите $\angle BAC$.
4. Дан треугольник ABC . Проведены высота AH и медиана CM . Обозначим их точку пересечения через P . Высота, проведенная из вершины B треугольника, пересекается с перпендикуляром, опущенным из точки H на прямую CM , в точке Q . Докажите, что прямые CQ и BP перпендикулярны.
5. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X , а на боковых сторонах – точки P и Q так, что $XPBQ$ – параллелограмм. Докажите, что точка Y , симметричная точке X относительно PQ , лежит на описанной окружности треугольника ABC .
6. Единичный квадрат разрезан на n треугольников. Докажите, что одним из треугольников можно накрыть квадрат со стороной $1/n$.
7. Все грани шестигранника – четырёхугольники, а в каждой его вершине сходятся по три ребра. Верно ли, что если для него существуют вписанная и описанная сферы, центры которых совпадают, то этот шестигранник – куб?

1. Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что прямая DE перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков AE и BC .
2. В остроугольном треугольнике ABC , в котором $\angle A = 45^\circ$, проведены высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 . Биссектриса угла BAA_1 пересекает прямую B_1A_1 в точке D , а биссектриса угла CAA_1 пересекает прямую C_1A_1 в точке E . Найдите угол между прямыми BD и CE .
3. Точки O и I – центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного треугольника ABC . Две равные окружности касаются сторон AB , BC и AC , BC соответственно; кроме этого, они касаются друг друга в точке K . Оказалось, что K лежит на прямой OI . Найдите $\angle BAC$.
4. Дан треугольник ABC . Проведены высота AH и медиана CM . Обозначим их точку пересечения через P . Высота, проведенная из вершины B треугольника, пересекается с перпендикуляром, опущенным из точки H на прямую CM , в точке Q . Докажите, что прямые CQ и BP перпендикулярны.
5. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X , а на боковых сторонах – точки P и Q так, что $XPBQ$ – параллелограмм. Докажите, что точка Y , симметричная точке X относительно PQ , лежит на описанной окружности треугольника ABC .
6. Единичный квадрат разрезан на n треугольников. Докажите, что одним из треугольников можно накрыть квадрат со стороной $1/n$.
7. Все грани шестигранника – четырёхугольники, а в каждой его вершине сходятся по три ребра. Верно ли, что если для него существуют вписанная и описанная сферы, центры которых совпадают, то этот шестигранник – куб?