10 класс	Производная в неравенствах	9 марта 2015

Теорема Ферма. Функция определена на отрезке и достигает максимума или минимума в некоторой его внутренней точке. Тогда, если в этой точке существует производная, то она равна нулю.

Теорема. Дифференцируемая функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ является неубывающей (невозрастающей) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) при всех x.

Следствие. Если $f(a) \geqslant g(a)$ и $f'(x) > g'(x)$ при всех $x > a$, то $f(x) > g(x)$ при всех $x > a$.

1. Пусть $a, b \geqslant 0$. Докажите, что $3a^3 + 7b^3 \geqslant 9ab^2$.

2. Пусть $\alpha > 1$, $x > -1$. Докажите, что $(1 + x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$.

3. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что $2x^9 + 9x^8 \leqslant 9x^{10} + 2$.

4. Пусть $x > 0$. Докажите, что $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ и $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

5. Пусть $x \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{2n}}{2n} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

6. Пусть α, β, γ – углы треугольника. Докажите, что $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

7. Что больше: e^π или π^e?

8. Дана дифференцируемая функция $f(x)$, заданная на отрезке $[0, 1]$, такая, что $f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что найдётся такая точка $x_0 \in (0, 1)$, что $f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

9. Пусть $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите

а) Неравенство Юнга. Если $a, b \geqslant 0$, то $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

б) Неравенство Гёльдера. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \geqslant 0$, то

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leqslant (a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

(докажите Гёльдера с помощью Юнга.)

в) Неравенство Минковского. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \geqslant 0$ и $p > 1$, то

$$\big((a_1 + b_1)^p + \ldots + (a_n + b_n)^p\big)^{\frac{1}{p}} \leqslant (a_1^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + \ldots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$

10. а) Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и ненулевых действительных $\alpha \geqslant \beta$ докажите **неравенство о средних симметрических**:

$$\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \ldots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

б) Докажите, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\ .$$

10 класс	Производная в неравенствах	9 марта 2015

Теорема Ферма. Функция определена на отрезке и достигает максимума или минимума в некоторой его внутренней точке. Тогда, если в этой точке существует производная, то она равна нулю.

Теорема. Дифференцируемая функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ является неубывающей (невозрастающей) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) при всех x.

Следствие. Если $f(a) \geqslant g(a)$ и $f'(x) > g'(x)$ при всех $x > a$, то $f(x) > g(x)$ при всех $x > a$.

1. Пусть $a, b \geqslant 0$. Докажите, что $3a^3 + 7b^3 \geqslant 9ab^2$.

2. Пусть $\alpha > 1$, $x > -1$. Докажите, что $(1 + x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$.

3. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что $2x^9 + 9x^8 \leqslant 9x^{10} + 2$.

4. Пусть $x > 0$. Докажите, что $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ и $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

5. Пусть $x \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{2n}}{2n} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

6. Пусть α, β, γ – углы треугольника. Докажите, что $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

7. Что больше: e^π или π^e?

8. Дана дифференцируемая функция $f(x)$, заданная на отрезке $[0, 1]$, такая, что $f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что найдётся такая точка $x_0 \in (0, 1)$, что $f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

9. Пусть $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите

а) Неравенство Юнга. Если $a, b \geqslant 0$, то $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

б) Неравенство Гёльдера. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \geqslant 0$, то

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leqslant (a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

(докажите Гёльдера с помощью Юнга.)

в) Неравенство Минковского. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \geqslant 0$ и $p > 1$, то

$$\left((a_1 + b_1)^p + \ldots + (a_n + b_n)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant (a_1^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + \ldots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$

10. а) Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и ненулевых действительных $\alpha \geqslant \beta$ докажите **неравенство о средних симметрических**:

$$\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \ldots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

б) Докажите, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\ .$$