10 класс	Многочлены деления круга	5 марта 2015

Напоминание. У многочлена $z^n - 1$ есть n различных комплексных корней, а именно числа вида $\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$, которые называются *корнями из единицы n-й степени.* Соответствующие точки на комплексной плоскости располагаются на единичной окружности с центром в нуле и образуют правильный n-угольник. ξ – корень из единицы n-й степени называется *примитивным*, если $\xi^m \neq 1$ для всех натуральных m, меньших n.

1. а) Пусть ξ – корень из единицы n-й степени, $\xi \neq 1$. Найдите сумму $1 + \xi + \xi^2 + \ldots + \xi^{n-1}$.

б) Чему равна сумма всех корней n-й степени из 1? А произведение?

в) А сколько всего примитивных корней из единицы n-й степени?

г) Радиус окружности, описанной около правильного n-угольника, равен 1. Найдите произведение расстояний от его фиксированной вершины A до всех остальных вершин этого многоугольника.

Критерий Эйзенштейна. Пусть все коэффициенты многочлена над $\mathbb{Z}$ (т.е. многочлена с целыми коэффициентами), кроме старшего, делятся на простое число p, и свободный член не делится на p^2. Тогда этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$ (т.е. не представляется в виде произведения двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами).

2. Докажите, что для любого простого p многочлен $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$ неприводим над $\mathbb{Z}$ (подсказка: попробуйте сдвинуть аргумент на 1).

Определение. *Многочлен деления круга* — это $\Phi_n(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_{\varphi(n)})$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{\varphi(n)}$ – все примитивные корни n-й степени из 1.

3. а) Докажите, что $x^n - 1 = \prod\limits_{d|n} \Phi_d(x)$.

б) Докажите, что все коэффициенты многочлена $\Phi_n(x)$ – целые числа.

в) Найдите все $\Phi_n(x)$ для всех $n \leqslant 8$.

Замечание. Мы видим, что все коэффициенты получившихся многочленов принадлежат множеству $\{-1, 0, 1\}$. Однако это не всегда так! Наименьшее n, при котором это не так – $n = 105$.

4. а) Докажите, что различные многочлены деления круга попарно взаимно просты.

б) Докажите, что все коэффициенты у $\Phi_n(x)$ расположены симметрично относительно середины.

в) Пусть многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами взаимно просты. Докажите, что тогда для достаточно больших простых p значения многочленов в одной и той же целой точке не могут одновременно делиться на p.

г) Докажите, что для достаточно больших простых p выполнено "$p \mid \Phi_n(a)$” $\Rightarrow$ "n является показателем a по модулю p" (т.е. n – наименьшая натуральная степень, в которой a даёт остаток 1 при делении на p) $\Rightarrow$ "$p = nk + 1$".

д) Частный случай теоремы Дирихле. Докажите, что для любого натурального n существует бесконечно много простых чисел вида $nk + 1$.

5. Докажите, что все многочлены деления круга неприводимы над $\mathbb{Z}$.

10 класс	Многочлены деления круга	5 марта 2015

Напоминание. У многочлена $z^n - 1$ есть n различных комплексных корней, а именно числа вида $\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$, которые называются *корнями из единицы n-й степени*. Соответствующие точки на комплексной плоскости располагаются на единичной окружности с центром в нуле и образуют правильный n-угольник. ξ – корень из единицы n-й степени называется *примитивным*, если $\xi^m \neq 1$ для всех натуральных m, меньших n.

1. а) Пусть ξ – корень из единицы n-й степени, $\xi \neq 1$. Найдите сумму $1 + \xi + \xi^2 + \ldots + \xi^{n-1}$.

б) Чему равна сумма всех корней n-й степени из 1? А произведение?

в) А сколько всего примитивных корней из единицы n-й степени?

г) Радиус окружности, описанной около правильного n-угольника, равен 1. Найдите произведение расстояний от его фиксированной вершины A до всех остальных вершин этого многоугольника.

Критерий Эйзенштейна. Пусть все коэффициенты многочлена над $\mathbb{Z}$ (т.е. многочлена с целыми коэффициентами), кроме старшего, делятся на простое число p, и свободный член не делится на p^2. Тогда этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$ (т.е. не представляется в виде произведения двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами).

2. Докажите, что для любого простого p многочлен $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$ неприводим над $\mathbb{Z}$ (подсказка: попробуйте сдвинуть аргумент на 1).

Определение. *Многочлен деления круга* — это $\Phi_n(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_{\varphi(n)})$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{\varphi(n)}$ – все примитивные корни n-й степени из 1.

3. а) Докажите, что $x^n - 1 = \prod\limits_{d|n} \Phi_d(x)$.

б) Докажите, что все коэффициенты многочлена $\Phi_n(x)$ – целые числа.

в) Найдите все $\Phi_n(x)$ для всех $n \leqslant 8$.

Замечание. Мы видим, что все коэффициенты получившихся многочленов принадлежат множеству $\{-1, 0, 1\}$. Однако это не всегда так! Наименьшее n, при котором это не так – $n = 105$.

4. а) Докажите, что различные многочлены деления круга попарно взаимно просты.

б) Докажите, что все коэффициенты у $\Phi_n(x)$ расположены симметрично относительно середины.

в) Пусть многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами взаимно просты. Докажите, что тогда для достаточно больших простых p значения многочленов в одной и той же целой точке не могут одновременно делиться на p.

г) Докажите, что для достаточно больших простых p выполнено "$p \mid \Phi_n(a)$" $\Rightarrow$ "n является показателем a по модулю p" (т.е. n – наименьшая натуральная степень, в которой a даёт остаток 1 при делении на p) $\Rightarrow$ "$p = nk + 1$".

д) Частный случай теоремы Дирихле. Докажите, что для любого натурального n существует бесконечно много простых чисел вида $nk + 1$.

5. Докажите, что все многочлены деления круга неприводимы над $\mathbb{Z}$.