10 класс | **Комбинаторика** | 2 марта 2015

1. На доске 10×10 расставлено 50 шашек; 25 в левой нижней четверти и 25 в верхней правой четверти. За один ход любая шашка может перепрыгнуть через шашку, соседнюю с ней по вертикали, горизонтали или диагонали, на следующую клетку, если она свободна. Могут ли шашки через некоторое время оказаться на левой половине доски?

2. В секретной службе работают n агентов – 001, 002, ..., 007, ..., n. Первый агент следит за тем, кто следит за вторым, второй - за тем, кто следит за третьим, и т.д., n-ый - за тем, кто следит за первым. Докажите, что n нечётно.

3. Камни лежат в трёх кучках: в одной – 51 камень, в другой – 49 камней, а в третьей – 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из чётного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

4. Двое играют в следующую игру: первый выписывает в ряд по своему желанию буквы A или B (слева направо, одну за другой; по одной букве за ход), а второй после каждого хода первого меняет местами любые две из выписанных букв или ничего не меняет (это тоже считается ходом). После того, как оба игрока сделают по 2015 ходов, игра заканчивается. Может ли второй играть так, чтобы при любых действиях первого игрока в результате получился палиндром (т. е. слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево)?

5. Каждый зритель, купивший билет в первый ряд кинотеатра, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своём месте. Билетёр может менять местами соседей, если оба сидят не на своих местах. Всегда ли он может рассадить всех на свои места?

6. На симпозиуме каждый делегат знаком хотя бы с одним из остальных участников, но при этом для любых двух делегатов найдется третий, не знакомый с ними обоими. Докажите, что всех делегатов можно разбить на три группы так, чтобы каждый участник симпозиума был знаком хотя бы с одним человеком из своей группы.

7. На доске 2015×2015 сидят 2014 жуков так, что никакие два из них не находятся в соседних(по стороне) клетках. Докажите, что один из них может переползти в соседнюю клетку так, чтобы это условие сохранилось.

8. Имеется 25 кусков сыра разной массы. Всегда ли можно один из этих кусков разрезать на две части и разложить сыр в два пакета так, что части разрезанного куска будут в разных пакетах, массы пакетов будут одинаковы и число кусков в пакетах также будет одинаково?

9. Сто мудрецов хотят проехать на электричке из 12 вагонов от первой до 76-й станции. Они знают, что на первой станции в два вагона электрички сядут два контролёра. После четвёртой станции на каждом перегоне один из контролёров будет переходить в соседний вагон, причём они ходят по очереди. Мудрец видит контролёра, только если он в соседнем вагоне или через вагон. На каждой станции каждый мудрец может перебежать по платформе не далее, чем через три вагона (например, из 7-го вагона мудрец может перебежать до любого вагона с номером от 4 до 10 и сесть в него). Какое максимальное число мудрецов сможет ни разу не оказаться в одном вагоне с контролёром, как бы контролёры не перемещались? (Мудрецы договариваются о стратегии заранее.)

1. На доске 10×10 расставлено 50 шашек; 25 в левой нижней четверти и 25 в верхней правой четверти. За один ход любая шашка может перепрыгнуть через шашку, соседнюю с ней по вертикали, горизонтали или диагонали, на следующую клетку, если она свободна. Могут ли шашки через некоторое время оказаться на левой половине доски?

2. В секретной службе работают n агентов – 001, 002, ..., 007, ..., n. Первый агент следит за тем, кто следит за вторым, второй - за тем, кто следит за третьим, и т.д., n-ый - за тем, кто следит за первым. Докажите, что n нечётно.

3. Камни лежат в трёх кучках: в одной – 51 камень, в другой – 49 камней, а в третьей – 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из чётного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

4. Двое играют в следующую игру: первый выписывает в ряд по своему желанию буквы A или B (слева направо, одну за другой; по одной букве за ход), а второй после каждого хода первого меняет местами любые две из выписанных букв или ничего не меняет (это тоже считается ходом). После того, как оба игрока сделают по 2015 ходов, игра заканчивается. Может ли второй играть так, чтобы при любых действиях первого игрока в результате получился палиндром (т. е. слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево)?

5. Каждый зритель, купивший билет в первый ряд кинотеатра, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своём месте. Билетёр может менять местами соседей, если оба сидят не на своих местах. Всегда ли он может рассадить всех на свои места?

6. На симпозиуме каждый делегат знаком хотя бы с одним из остальных участников, но при этом для любых двух делегатов найдется третий, не знакомый с ними обоими. Докажите, что всех делегатов можно разбить на три группы так, чтобы каждый участник симпозиума был знаком хотя бы с одним человеком из своей группы.

7. На доске 2015×2015 сидят 2014 жуков так, что никакие два из них не находятся в соседних(по стороне) клетках. Докажите, что один из них может переползти в соседнюю клетку так, чтобы это условие сохранилось.

8. Имеется 25 кусков сыра разной массы. Всегда ли можно один из этих кусков разрезать на две части и разложить сыр в два пакета так, что части разрезанного куска будут в разных пакетах, массы пакетов будут одинаковы и число кусков в пакетах также будет одинаково?

9. Сто мудрецов хотят проехать на электричке из 12 вагонов от первой до 76-й станции. Они знают, что на первой станции в два вагона электрички сядут два контролёра. После четвёртой станции на каждом перегоне один из контролёров будет переходить в соседний вагон, причём они ходят по очереди. Мудрец видит контролёра, только если он в соседнем вагоне или через вагон. На каждой станции каждый мудрец может перебежать по платформе не далее, чем через три вагона (например, из 7-го вагона мудрец может перебежать до любого вагона с номером от 4 до 10 и сесть в него). Какое максимальное число мудрецов сможет ни разу не оказаться в одном вагоне с контролёром, как бы контролёры не перемещались? (Мудрецы договариваются о стратегии заранее.)