10 класс **Коники. Эллипс и гипербола** 26 февраля 2015

Определение. *Эллипсом* называется геометрическое место точек X таких, что сумма $F_1X + F_2X$ постоянна для некоторых точек F_1 и F_2. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* эллипса.

Определение. *Гиперболой* называется геометрическое место точек X таких, что $|F_1X - F_2X|$ постоянно для некоторых точек F_1 и F_2. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* гиперболы.

1. Докажите *оптическое свойство* эллипса: прямая, касающаяся эллипса в точке X, является внешней биссектрисой угла F_1XF_2.

2. Докажите *оптическое свойство* гиперболы: прямая, касающаяся гиперболы в точке X, является биссектрисой угла F_1XF_2.

3. Хорда XY проходит через фокус эллипса F_1. Касательные в точках X и Y пересекаются в точке P. Докажите, что $PF_1 \perp XY$.

4. a) Докажите, что проекции фокуса F_1 эллипса на касательные лежат на одной окружности.

b) Для каждой касательной эллипса l выберем на ней точку P такую, что $\angle(l, PF_1) = \alpha$. Докажите, что геометрическое место точек P — это окружность.

c) Пусть $F_1F_2 = d$, $F_1X + F_2X = c$ для любой точки X эллипса. Сколько точек касания может быть у окружности из предыдущего пункта и эллипса в зависимости от α?

5. Пусть касательные к эллипсу в точках X и Y пересекаются в точке P.

a) Докажите, что углы F_1PX и F_2PY равны.

b) Докажите, что F_1P — биссектриса угла XF_1Y.

6. Докажите, что геометрическим местом точек, из которых эллипс виден под прямым углом, является окружность.

7. Из точки P провели две касательные PX и PY к одной ветви гиперболы. Оказалось, что четырехугольник F_1XF_2Y — выпуклый. Докажите, что P — центр окружности, вписанной в этот четырехугольник.

Напоминание. Точки P и Q называются изогонально сопряженными относительно треугольника ABC, если прямые AP, BP, CP симметричны прямым AQ, BQ, CQ относительно биссектрис углов A, B, C треугольника ABC.

8. Внутри треугольника ABC даны изогонально сопряженные точки P и Q.

a) Докажите, что проекции точек P и Q на стороны треугольника ABC лежат на одной окружности.

b) Докажите, что существует эллипс с фокусами P и Q, касающийся сторон треугольника ABC.

Определение. *Эллипсом* называется геометрическое место точек X таких, что сумма $F_1X + F_2X$ постоянна для некоторых точек F_1 и F_2. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* эллипса.

Определение. *Гиперболой* называется геометрическое место точек X таких, что $|F_1X - F_2X|$ постоянно для некоторых точек F_1 и F_2. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* гиперболы.

1. Докажите *оптическое свойство* эллипса: прямая, касающаяся эллипса в точке X, является внешней биссектрисой угла F_1XF_2.

2. Докажите *оптическое свойство* гиперболы: прямая, касающаяся гиперболы в точке X, является биссектрисой угла F_1XF_2.

3. Хорда XY проходит через фокус эллипса F_1. Касательные в точках X и Y пересекаются в точке P. Докажите, что $PF_1 \perp XY$.

4. a) Докажите, что проекции фокуса F_1 эллипса на касательные лежат на одной окружности.

b) Для каждой касательной эллипса l выберем на ней точку P такую, что $\angle(l, PF_1) = \alpha$. Докажите, что геометрическое место точек P — это окружность.

c) Пусть $F_1F_2 = d$, $F_1X + F_2X = c$ для любой точки X эллипса. Сколько точек касания может быть у окружности из предыдущего пункта и эллипса в зависимости от α?

5. Пусть касательные к эллипсу в точках X и Y пересекаются в точке P.

a) Докажите, что углы F_1PX и F_2PY равны.

b) Докажите, что F_1P — биссектриса угла XF_1Y.

6. Докажите, что геометрическим местом точек, из которых эллипс виден под прямым углом, является окружность.

7. Из точки P провели две касательные PX и PY к одной ветви гиперболы. Оказалось, что четырехугольник F_1XF_2Y — выпуклый. Докажите, что P — центр окружности, вписанной в этот четырехугольник.

Напоминание. Точки P и Q называются изогонально сопряженными относительно треугольника ABC, если прямые AP, BP, CP симметричны прямым AQ, BQ, CQ относительно биссектрис углов A, B, C треугольника ABC.

8. Внутри треугольника ABC даны изогонально сопряженные точки P и Q.

a) Докажите, что проекции точек P и Q на стороны треугольника ABC лежат на одной окружности.

b) Докажите, что существует эллипс с фокусами P и Q, касающийся сторон треугольника ABC.