

Определение. *Параболой* называется геометрическое место точек X , равноудаленных от фиксированной точки F и прямой l . Точка F называется *фокусом* параболы, а прямая l — *директрисой*.

1. Докажите *оптическое свойство* параболы: прямая, касающаяся параболы в точке X , образует равные углы с прямой FX и осью симметрии параболы.
2. Пусть касательные к параболе в точках X и Y пересекаются в точке P , X' и Y' — проекции точек X и Y на директрису. Докажите, что P — центр описанной окружности треугольника $FX'Y'$.
3. Докажите, что проекции фокуса параболы на ее касательные лежат на прямой, касающейся параболы в ее вершине.
4. Докажите, что множество точек, из которых парабола видна под прямым углом, есть директриса.
5. Пусть касательные к параболе в точках X и Y пересекаются в точке P .
 - а) Докажите, что PF — симедиана треугольника PXY .
 - б) Докажите, что FP — биссектриса угла XFY .
6. Пусть парабола касается прямых AB , AC и BC .
 - а) Докажите, что фокус этой параболы лежит на описанной окружности треугольника ABC ;
 - б) Докажите, что ортоцентр треугольника ABC лежит на директрисе.
7. Докажите, что существует система координат, в которой уравнение параболы имеет вид $y = ax^2$. Найдите координаты фокуса и уравнение директрисы в этой системе координат.
8. На параболе $y = ax^2$ выбраны различные точки A , B , C и D с абсциссами a , b , c , d соответственно. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда $a + b + c + d = 0$.
9. Две параболы с перпендикулярными осями пересекаются в четырех точках. Докажите, что эти точки лежат на одной окружности.

Определение. *Параболой* называется геометрическое место точек X , равноудаленных от фиксированной точки F и прямой l . Точка F называется *фокусом* параболы, а прямая l — *директрисой*.

1. Докажите *оптическое свойство* параболы: прямая, касающаяся параболы в точке X , образует равные углы с прямой FX и осью симметрии параболы.
2. Пусть касательные к параболе в точках X и Y пересекаются в точке P , X' и Y' — проекции точек X и Y на директрису. Докажите, что P — центр описанной окружности треугольника $FX'Y'$.
3. Докажите, что проекции фокуса параболы на ее касательные лежат на прямой, касающейся параболы в ее вершине.
4. Докажите, что множество точек, из которых парабола видна под прямым углом, есть директриса.
5. Пусть касательные к параболе в точках X и Y пересекаются в точке P .
 - а) Докажите, что PF — симедиана треугольника PXY .
 - б) Докажите, что FP — биссектриса угла XFY .
6. Пусть парабола касается прямых AB , AC и BC .
 - а) Докажите, что фокус этой параболы лежит на описанной окружности треугольника ABC ;
 - б) Докажите, что ортоцентр треугольника ABC лежит на директрисе.
7. Докажите, что существует система координат, в которой уравнение параболы имеет вид $y = ax^2$. Найдите координаты фокуса и уравнение директрисы в этой системе координат.
8. На параболе $y = ax^2$ выбраны различные точки A , B , C и D с абсциссами a , b , c , d соответственно. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда $a + b + c + d = 0$.
9. Две параболы с перпендикулярными осями пересекаются в четырех точках. Докажите, что эти точки лежат на одной окружности.