10 класс	Письменные задачи	16 февраля 2015

1. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трёх цветов, причём все три цвета присутствуют. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с вершинами трёх разных цветов.

2. На столе стоят 2004 коробочки, в каждой из которых лежит по одному шарику. Известно, что некоторые из шариков – белые, и их количество чётно. Разрешается указать на любые две коробочки и спросить, есть ли в них хотя бы один белый шарик. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно определить какую-нибудь коробочку, в которой лежит белый шарик?

3. Четырёхугольник $ABCD$ является одновременно и вписанным, и описанным, причём вписанная в $ABCD$ окружность касается его сторон AB, BC, CD и AD в точках K, L, M, N соответственно. Биссектрисы внешних углов A и B четырёхугольника пересекаются в точке K', внешних углов B и C – в точке L', внешних углов C и D – в точке M', внешних углов D и A – в точке N'. Докажите, что прямые KK', LL', MM' и NN' проходят через одну точку.

4. Дано натуральное $n > 3$ и положительные числа $x_1, \ldots, x_n$, произведение которых равно 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1\ .$$

10 класс	Письменные задачи	16 февраля 2015

1. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трёх цветов, причём все три цвета присутствуют. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с вершинами трёх разных цветов.

2. На столе стоят 2004 коробочки, в каждой из которых лежит по одному шарику. Известно, что некоторые из шариков – белые, и их количество чётно. Разрешается указать на любые две коробочки и спросить, есть ли в них хотя бы один белый шарик. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно определить какую-нибудь коробочку, в которой лежит белый шарик?

3. Четырёхугольник $ABCD$ является одновременно и вписанным, и описанным, причём вписанная в $ABCD$ окружность касается его сторон AB, BC, CD и AD в точках K, L, M, N соответственно. Биссектрисы внешних углов A и B четырёхугольника пересекаются в точке K', внешних углов B и C – в точке L', внешних углов C и D – в точке M', внешних углов D и A – в точке N'. Докажите, что прямые KK', LL', MM' и NN' проходят через одну точку.

4. Дано натуральное $n > 3$ и положительные числа $x_1, \ldots, x_n$, произведение которых равно 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1\ .$$

10 класс	Письменные задачи	16 февраля 2015

1. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трёх цветов, причём все три цвета присутствуют. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с вершинами трёх разных цветов.

2. На столе стоят 2004 коробочки, в каждой из которых лежит по одному шарику. Известно, что некоторые из шариков – белые, и их количество чётно. Разрешается указать на любые две коробочки и спросить, есть ли в них хотя бы один белый шарик. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно определить какую-нибудь коробочку, в которой лежит белый шарик?

3. Четырёхугольник $ABCD$ является одновременно и вписанным, и описанным, причём вписанная в $ABCD$ окружность касается его сторон AB, BC, CD и AD в точках K, L, M, N соответственно. Биссектрисы внешних углов A и B четырёхугольника пересекаются в точке K', внешних углов B и C – в точке L', внешних углов C и D – в точке M', внешних углов D и A – в точке N'. Докажите, что прямые KK', LL', MM' и NN' проходят через одну точку.

4. Дано натуральное $n > 3$ и положительные числа $x_1, \ldots, x_n$, произведение которых равно 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1\ .$$