10 класс	Неравенства	16 февраля 2015

1. Сумма положительных чисел x, y, z равна 11. Докажите неравенство $x^{[x]}+y^{[y]}+z^{[z]}>81$.

2. Для положительных x, y, z докажите неравенство $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}\geqslant 4(x-z)$.

3. Для действительных чисел a,b,c докажите неравенство $a\sqrt{a^2+c^2}+b\sqrt{b^2+c^2}\leqslant a^2+b^2+c^2$.

4. Про действительные числа $x_0,x_1,\ldots,x_n$ известно, что $x_0>x_1>\ldots>x_n$. Докажите неравенство

$$x_0+\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_1-x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}-x_n}\geqslant x_n+2n\ .$$

5. Положительные x, y, z таковы, что модуль разности любых двух из них меньше 2. Докажите, что

$$\sqrt{xy+1}+\sqrt{yz+1}+\sqrt{zx+1}>x+y+z\ .$$

6. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc=1$ и $a^3>36$. Докажите, что $a^2/3+b^2+c^2>ab+bc+ac$.

7. Для положительных чисел $x\geqslant y\geqslant z$ докажите неравенство $\dfrac{x^2y}{z}+\dfrac{y^2z}{x}+\dfrac{z^2x}{y}\geqslant x^2+y^2+z^2$.

8. Положительные x,y,z таковы, что $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$. Докажите неравенство $x+y+z\leqslant\dfrac{3}{2}$.

9. Пусть S – сумма положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Докажите, что $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i}\geqslant\frac{n}{n-1}$.

10. Положительные числа $x_1,\ldots,x_n$ таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_n=n$. Докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_1^2+1}+\ldots+\frac{x_n}{x_n^2+1}\leqslant\frac{1}{x_1+1}+\ldots+\frac{1}{x_n+1}\ .$$

10 класс	Неравенства	16 февраля 2015

1. Сумма положительных чисел x, y, z равна 11. Докажите неравенство $x^{[x]} + y^{[y]} + z^{[z]} > 81$.

2. Для положительных x, y, z докажите неравенство $\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} \geqslant 4(x - z)$.

3. Для действительных чисел a, b, c докажите неравенство $a\sqrt{a^2 + c^2} + b\sqrt{b^2 + c^2} \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.

4. Про действительные числа $x_0, x_1, \ldots, x_n$ известно, что $x_0 > x_1 > \ldots > x_n$. Докажите неравенство

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant x_n + 2n\ .$$

5. Положительные x, y, z таковы, что модуль разности любых двух из них меньше 2. Докажите, что

$$\sqrt{xy + 1} + \sqrt{yz + 1} + \sqrt{zx + 1} > x + y + z\ .$$

6. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$ и $a^3 > 36$. Докажите, что $a^2/3 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$.

7. Для положительных чисел $x \geqslant y \geqslant z$ докажите неравенство $\dfrac{x^2y}{z} + \dfrac{y^2z}{x} + \dfrac{z^2x}{y} \geqslant x^2 + y^2 + z^2$.

8. Положительные x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Докажите неравенство $x + y + z \leqslant \dfrac{3}{2}$.

9. Пусть S – сумма положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{S - a_i} \geqslant \dfrac{n}{n-1}$.

10. Положительные числа $x_1, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$. Докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_1^2 + 1} + \ldots + \frac{x_n}{x_n^2 + 1} \leqslant \frac{1}{x_1 + 1} + \ldots + \frac{1}{x_n + 1}\ .$$