10 класс **Комбинаторика** 12 февраля 2015

1. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник 5×9. В левом нижнем углу стоит фишка. Коля и Серёжа по очереди передвигают ее на любое количество клеток либо вправо, либо вверх. Первым ходит Коля. Выигрывает тот, кто поставит фишку в правый верхний. Кто выигрывает при правильной игре?

2. В каждой клетке таблицы 24×24 записано число, равное $+1$ или -1. За один ход можно поменять знаки на противоположные у одного из этих чисел, а также одновременно и у всех чисел, которые находятся с ним в одной строке или столбце. Докажите, что за несколько ходов из любой расстановки чисел можно получить любую.

3. В прямоугольной таблице некоторые клетки отмечены: в них стоят звездочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в ее строке совпадает с количеством звездочек в ее столбце. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хотя бы одна звездочка, совпадает с количеством столбцов в таблице, в которых есть звездочка.

4. Коля и Витя играют в следующую игру. На столе лежит куча из 31 камня. Мальчики делают ходы поочерёдно, а начинает Коля. Делая ход, играющий делит каждую кучку, в которой больше одного камня, на две меньшие кучки. Выигрывает тот, кто после своего хода оставляет кучки по одному камню в каждой. Сможет ли Коля сделать так, чтобы выиграть при любой игре Вити?

5. Король обошел доску 9×9, побывав в каждой клетке ровно один раз. Маршрут короля не замкнутый и, возможно, самопересекающийся. Какова максимальная длина такого маршрута? (Длина хода по диагонали равна $\sqrt{2}$, а длина хода по горизонтали или вертикали равна 1.)

6. На одном из полей доски 7×7 стоит фишка. Разрешается последовательно ставить на пустые поля новые фишки, но так, чтобы каждое поле, на которое выставляется очередная фишка имело бы общую сторону не более чем с одним уже занятым полем. Какое максимальное количество фишек может оказаться после выполнения таких операций?

7. В микросхеме 2000 контактов, первоначально любые два контакта соединены отдельным проводом. Хулиганы Миша и Вадим по очереди перерезают провода, причём Миша (он начинает) за ход режет один провод, а Вадим – либо один, либо три провода. Хулиган, отрезающий последний провод от какого-либо контакта, проигрывает. Кто из них выигрывает при правильной игре?

8. На доске написано натуральное число. Каждую минуту к нему прибавляется сумма его цифр, стоящих на четных местах его десятичной записи (цифра десятков, цифра тысяч и т.д.). Докажите, что рано или поздно число на доске перестанет меняться.

1. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник 5×9. В левом нижнем углу стоит фишка. Коля и Серёжа по очереди передвигают ее на любое количество клеток либо вправо, либо вверх. Первым ходит Коля. Выигрывает тот, кто поставит фишку в правый верхний. Кто выигрывает при правильной игре?

2. В каждой клетке таблицы 24×24 записано число, равное $+1$ или -1. За один ход можно поменять знаки на противоположные у одного из этих чисел, а также одновременно и у всех чисел, которые находятся с ним в одной строке или столбце. Докажите, что за несколько ходов из любой расстановки чисел можно получить любую.

3. В прямоугольной таблице некоторые клетки отмечены: в них стоят звездочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в ее строке совпадает с количеством звездочек в ее столбце. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хотя бы одна звездочка, совпадает с количеством столбцов в таблице, в которых есть звездочка.

4. Коля и Витя играют в следующую игру. На столе лежит куча из 31 камня. Мальчики делают ходы поочерёдно, а начинает Коля. Делая ход, играющий делит каждую кучку, в которой больше одного камня, на две меньшие кучки. Выигрывает тот, кто после своего хода оставляет кучки по одному камню в каждой. Сможет ли Коля сделать так, чтобы выиграть при любой игре Вити?

5. Король обошел доску 9×9, побывав в каждой клетке ровно один раз. Маршрут короля не замкнутый и, возможно, самопересекающийся. Какова максимальная длина такого маршрута? (Длина хода по диагонали равна $\sqrt{2}$, а длина хода по горизонтали или вертикали равна 1.)

6. На одном из полей доски 7×7 стоит фишка. Разрешается последовательно ставить на пустые поля новые фишки, но так, чтобы каждое поле, на которое выставляется очередная фишка имело бы общую сторону не более чем с одним уже занятым полем. Какое максимальное количество фишек может оказаться после выполнения таких операций?

7. В микросхеме 2000 контактов, первоначально любые два контакта соединены отдельным проводом. Хулиганы Миша и Вадим по очереди перерезают провода, причём Миша (он начинает) за ход режет один провод, а Вадим – либо один, либо три провода. Хулиган, отрезающий последний провод от какого-либо контакта, проигрывает. Кто из них выигрывает при правильной игре?

8. На доске написано натуральное число. Каждую минуту к нему прибавляется сумма его цифр, стоящих на четных местах его десятичной записи (цифра десятков, цифра тысяч и т.д.). Докажите, что рано или поздно число на доске перестанет меняться.