10 класс | Теорема Хелли | 9 февраля 2015

Определение. Множество называется *выпуклым*, если для любой пары его точек оно целиком содержит отрезок, соединяющий эти две точки.

Теорема Хелли. В пространстве $\mathbb{R}^n$ дано конечное семейство выпуклых множеств, причем любые $n+1$ множество имеют общую точку. Тогда все множества имеют общую точку.

Упражнение 1. Докажите, что пересечение конечного числа выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Упражнение 2. Останется ли верна теорема Хелли, если убрать требование конечности числа выпуклых множеств?

Упражнение 3. Перечислите все выпуклые подмножества прямой.

1. Докажите теорему Хелли для $n = 1$.

2. Дан выпуклый многоугольник. Известно, что для любых трех его сторон можно выбрать точку O внутри многоугольника так, что перпендикуляры, опущенные из точки O на эти три стороны, попадают на сами стороны, а не на их продолжения. Докажите, что тогда такую точку O можно выбрать для всех сторон одновременно.

3. Докажите, что внутри любого выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его соседних вершин.

4. На плоскости дано несколько прямых, причем любые три из них можно пересечь кругом радиуса 1. Докажите, что все прямые можно пересечь кругом радиуса 1.

5. На плоскости дано несколько попарно параллельных отрезков. Известно, что для любых трех из них найдется прямая, их пересекающая. Докажите, что существует прямая, пересекающая все отрезки.

6. На плоскости даны несколько точек, причем любые три из них можно заключить в круг радиуса 1. Докажите, что все точки можно заключить в круг радиуса 1.

7. Докажите, что если несколько полуплоскостей покрывают плоскость, то из них всегда можно выбрать три, которые также покрывают всю плоскость.

8. На плоскости даны несколько точек, расстояние между любыми двумя из которых не больше 1. Докажите, что все эти точки можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

10 класс	Теорема Хелли	9 февраля 2015

Определение. Множество называется *выпуклым*, если для любой пары его точек оно целиком содержит отрезок, соединяющий эти две точки.

Теорема Хелли. В пространстве $\mathbb{R}^n$ дано конечное семейство выпуклых множеств, причем любые $n+1$ множество имеют общую точку. Тогда все множества имеют общую точку.

Упражнение 1. Докажите, что пересечение конечного числа выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Упражнение 2. Останется ли верна теорема Хелли, если убрать требование конечности числа выпуклых множеств?

Упражнение 3. Перечислите все выпуклые подмножества прямой.

1. Докажите теорему Хелли для $n = 1$.

2. Дан выпуклый многоугольник. Известно, что для любых трех его сторон можно выбрать точку O внутри многоугольника так, что перпендикуляры, опущенные из точки O на эти три стороны, попадают на сами стороны, а не на их продолжения. Докажите, что тогда такую точку O можно выбрать для всех сторон одновременно.

3. Докажите, что внутри любого выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его соседних вершин.

4. На плоскости дано несколько прямых, причем любые три из них можно пересечь кругом радиуса 1. Докажите, что все прямые можно пересечь кругом радиуса 1.

5. На плоскости дано несколько попарно параллельных отрезков. Известно, что для любых трех из них найдется прямая, их пересекающая. Докажите, что существует прямая, пересекающая все отрезки.

6. На плоскости даны несколько точек, причем любые три из них можно заключить в круг радиуса 1. Докажите, что все точки можно заключить в круг радиуса 1.

7. Докажите, что если несколько полуплоскостей покрывают плоскость, то из них всегда можно выбрать три, которые также покрывают всю плоскость.

8. На плоскости даны несколько точек, расстояние между любыми двумя из которых не больше 1. Докажите, что все эти точки можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.